This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Soc 3983.6

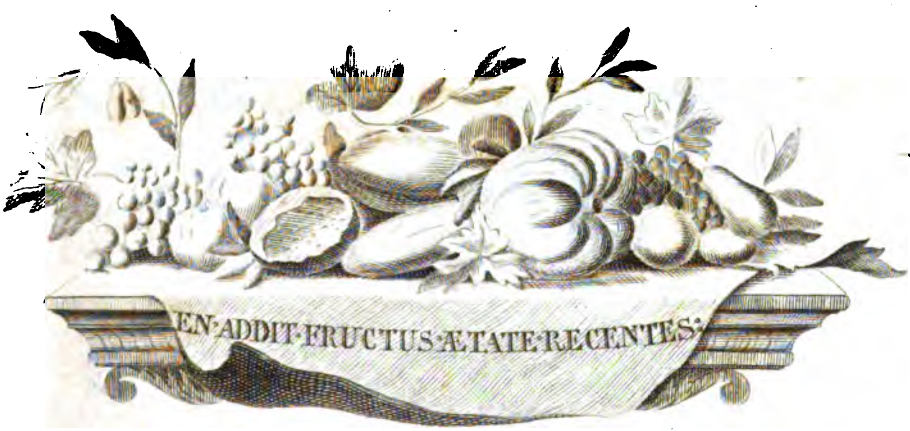
VERI
TAS

HARVARD
COLLEGE
LIBRARY

# NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

## TOM. V.

ad Annum MDCCLIV. et MDCCLV.




PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLX.

LSoc 3983.6

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

5443
50.256
9-7

# SVMMARIVM DISSERTATIONVM

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS V.

# MATHEMATICA.

## I.

## Demonſtratio Theorematis Fermatiani
*omnem numerum primum formae* $4n+1$ *eſſe ſummam duorum quadratorum.*

## Auctore Leonh. Eulero. p. 3.

De hoc inſigni Theoremate iam in ſuperiori Tomo a Cel. Auctore egregiae obſeruationes ſunt prolatae, quibus eius veritas tam ſolidis rationibus fuit comprobata, vt nullum dubium relinqui videretur; neque tamen hae rationes vicem firmae demonſtrationis ſuſtinebant. In hoc memorabile cernitur exemplum eiusmodi propoſitionis, de cuius veritate dubitare nefas ſit, etiamſi completa demonſtratione deſtituamur. Talibus autem propoſitionibus nusquam minus, quam in Matheſi, locum relinqui vulgo putatur, vbi omnia firmiſſimis demonſtrationibus munita videntur. Verum hoc etiam tantum in doctrina numerorum vſu venire deprehendimus, in quorum natura ſcrutanda *Fermatius* ita excelluit, vt quam plurimas proprietates detexerit, atque etiam demonſtraſſe ſit profeſſus, quarum plerasque etiam nunc ſine demonſtratione veritati conſentaneas agnoſcere debemus; dum in reliquis Matheſeos partibus, ac multo magis in aliis ſcientiae generibus, quarum propoſitionum veritas non per rigidas demonſtrationes nobis eſt perſpecta, eae merito ſuſpectae videri debent, cum adeo plerumque, quandoquidem eas accuratius intueri licet,

 falſae

falſae deprehenduntur. In eo genere igitur inprimis iſtud Theorema Fermatianum, quod omnis numerus primus formae $4n+1$ ſit ſumma duorum quadratorum, ſtudium Geometrarum fatigauit, atque Cel. *Eulerus* in eius demonſtratione inueſtiganda multum diuque deſudaſſe videtur, cum in ſuperiori Tomo plura Theoremata huc pertinentia ex profundiſſimis numerorum myſteriis elicuiſſet, neque tamen ſcopum attingere potuiſſet. Tam prope autem eo pertigerat, vt hic, quaſi reliquo ſpatio feliciter confecto, tandem perfectam demonſtrationem ſit adeptus, quae cum per tot ambages tantasque numerorum difficultates ſit deducta, eo magis attentionem et ſtudium Geometrarum excitare debebit. Nullum enim dubium eſt, quin his argumentis probe perpenſis, via multo breuior et planior eodem perueniendi aperiatur. Talis autem demonſtratio breuior ac certe nobis planior aditum ad abſcondita numerorum arcana eſſet patefactura, quae etiamnum, non niſi quaſi per tenebras, contemplari licet.

Verſatur ergo memorabile Theorema circa numeros formae $4n+1$, ſeu eos numeros impares, qui vnitate excedunt multipla quaternarii, qui ſunt: 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45. 49. etc. In his diſtinguuntur numeri primi 5. 13. 17. 29. 37. 41. a compoſitis 9. 21. 25. 33. 45. 49, ac de illis affirmatur ſingulos eſſe aggregata binorum quadratorum, veluti $5=1+4$; $13=4+9$; $17=1+16$; $29=4+25$; $37=1+36$; $41=16+25$. etc. quod eo magis mirum videtur, cum haec quadrata nulla ra-

ratione procedant. Inter compoſitos autem, etſi alii ipſi ſunt quadrata, vt 9. 25, 49 etc. alii vero etiam ſummae duorum quadratorum aequantur: vnde propoſitio tantum ad numeros primos formae $4n+1$ reſtringitur. Huius ergo veritas nunc demum pro demonſtrata eſt habenda, ſiquidem demonſtratio Fermatiana penitus intercidit. In praecedente autem Tomo demonſtratio eo erat producta, vt oſtenderetur, quoties $4n+1$ ſit numerus primus, ſemper dari eiusmodi duos numeros $a$ et $b$, vt $a^{2n}+b^{2n}$ eſſet per $4n+1$ diuiſibile: hoc ipſum autem tum ſine probatione relinquebatur. Nunc igitur negotium ita Auctor abſoluit, vt cum multo ante demonſtraſſet, hanc formam $a^{4n}-b^{4n}$, ſeu productum hoc $(a^{2n}-b^{2n})(a^{2n}+b^{2n})$ ſemper eſſe per numerum primum $4n+1$ diuiſibile, doceret, ſemper dari caſus, quibus alter factor $a^{2n}-b^{2n}$ non ſit diuiſibilis per $4n+1$, tum enim neceſſario ſequitur, alterum factorem $a^{2n}+b^{2n}$ hunc diuiſorem complecti. Quod reliquum eſt, iam ante erat praeſtitum: quia enim $a^{2n}+b^{2n}$ eſt ſumma duorum quadratorum, ſimulque firma demonſtratione euictum eſt, ſummam talium binorum quadratorum nullos alios diuiſores admittere, niſi qui ipſi ſint duorum quadratorum ſummae, neceſſe eſt, numerum $4n+1$ eſſe ſummam duorum quadratorum. Hinc igitur liquet, quam ſubtilia et vndequaque conquiſita ratiocinia ad huiusmodi demonſtrationes requirantur, et quam longe adhuc a ſolida numerorum cognitione ſimus remoti.

Huic ſcripto pag. 13 ſine peculiari titulo adiungitur noua diſſertatio, in qua reſidua, quae in diuiſione numerorum quadratorum per quosuis numeros remanent, examini ſubiiciuntur, vnde iterum egregiae numerorum proprietates deducuntur, vel omnino nouae, vel iam quidem cognitae, ſed nouo modo demonſtratae. Nemo ignorat omnes numeros quadratos, qui per 3 diuidi nequeant, in diuiſione ſemper vnitatem relinquere, neque vllum dari numerum quadratum, qui per 3 diuiſus duo relinquat. Simili modo nullus datur numerus quadratus, qui per 4 diuiſus vel 2, vel 3 relinquat, ſed reſiduum ſemper eſt 1, niſi diuiſio ſuccedat, quo caſu reſiduum cenſendum eſt 0 Deinde nullus datur numerus quadratus, qui per 5 diuiſus relinquat 2, vel 3, ſed reſidua ſemper ſunt vel 0, vel 1, vel 4. Atque in genere per quemcunque numerum numeri quadrati diuidantur, a reſiduis certi numeri excluduntur, quos Cel. Auctor hic imprimis conſiderat, et *non reſidua* appellat. Tum pro quocunque diuiſore eximias proprietates tam inter reſidua, quam non reſidua obſeruat, indeque plura egregia Theoremata demonſtrat; veluti nunquam euenire poſſe., vt haec forma $4mn - m - n$, quicunque etiam numeri pro $m$ et $n$ aſſumantur, fiat numerus quadratus. His ſpeculationibus tantum non deducitur Auctor tandem ad illud elegantiſſimum Theorema, *quod omnes numeri ſint aggregata quatuor vel pauciorum quadratorum*, quod etiam *Fermatius* ex profundiſſimis numerorum myſteriis demonſtraſſe affirmat, et cuius demonſtrationis iactura aeque eſt dolenda, ac tot veterum ſcriptorum, quibus nos temporum iactura priuauit. Etſi enim Auctor in

poſtremo

poſtremo Theoremate demonſtrat, omnem numerum eſſe *ſummam quatuor quadratorum vel pauciorum*, *ſiquidem quadrata fracta non excludantur*, tamen haec adiecta conditio maximum diſcrimen inter hanc demonſtrationem et eam, quam deſideramus, facit. Supereſt igitur demonſtrandum, *qui numerus in fractis ſit ſumma quatuor quadratorum*, *eundem quoque in integris quatuor quadratorum ſummae aequari*.

## II.

## Obſeruatio de ſummis Diuiſorum. Auct. L. Eulero. p. 59.

Diuiſores cuiusque numeri ii vocantur numeri, per quos illum ſine reſiduo diuidere licet; vnde inter diuiſores cuiusque numeri reperitur primo vnitas, tum vero ille ipſe numerus, quandoquidem omnis numerus tam per vnitatem, quam per ſe ipſum diuidi poteſt. Iam conſtat eos numeros, qui praeter vnitatem et ſe ipſos nullos alios diuiſores admittunt, vocari primos, reliquos vero, qui praeterea per alios numeros diuidi ſe ſine reſiduo patiuntur, compoſitos; atque in Arithmetica vulgari traditur methodus, omnes cuiusque numeri diuiſores inueniendi. Auctor igitur in hac diſſertatione ſummam omnium diuiſorum cuiusque numeri contemplatur, non eo conſilio, vti alias in inueſtigatione numerorum perfectorum, vel amicabilium, aliarumue

huius

huiusmodi quaeſtionum fieri ſolet, ſed vt ordinem, et quaſi legem, qua iſtae ſummae diuiſorum ſingulis numeris conuenientes procedant, exploret, qui certe maxime abſconditus videri debet, cum pro numeris primis, ſumma diuiſorum ipſos vnitate ſuperet, pro compoſitis autem eo magis, quo plures factores primos in ſe complectuntur. Quoniam igitur ratio progreſſionis numerorum primorum adhuc ſummum eſt myſterium, in quod ne *Fermatio* quidem penetrare licuit, horum autem ratio manifeſto in ſummas diuiſorum ingreditur, quis dubitaret has quoque nulli lege ſubiectas pronunciare? Eo maiorem igitur haec diſſertatio attentionem meretur, quod ita lex ibi in lucem eſt protracta, etſi nondum ſummo rigore demonſtrata. Auctori autem hic idem vſu euenit, quod ante in Theoremate Fermatiano, vt mox deinceps defectum demonſtrationis ſuppleuerit. Quod enim in demonſtratione hic tradita adhuc deſideratur, ſtatim in ſequenti diſſertatione ſupplebitur. Quo haec clarius exponi poſſint, vtitur Auctor ſigno $\int$ ad ſummam diuiſorum cuiusque numeri, cui praefigitur, indicandam. Ita $\int n$ indicat ſummam omnium diuiſorum numeri $n$, vnde intelligitur fore vt ſequitur:

| | |
|---|---|
| $\int 1 = 1$ | $\int 11 = 1 + 11 = 12$ |
| $\int 2 = 1 + 2 = 3$ | $\int 12 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$ |
| $\int 3 = 1 + 3 = 4$ | $\int 13 = 1 + 13 = 14$ |
| $\int 4 = 1 + 2 + 4 = 7$ | $\int 14 = 1 + 2 + 7 + 14 = 24$ |
| $\int 5 = 1 + 5 = 6$ | $\int 15 = 1 + 3 + 5 + 15 = 24$ |
| $\int 6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ | $\int 16 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ |
| $\int 7 = 1 + 7 = 8$ | $\int 17 = 1 + 17 = 18$ |
| $\int 8 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$ | $\int 18 = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39$ |
| $\int 9 = 1 + 3 + 9 = 13$ | $\int 19 = 1 + 19 = 20$ |
| $\int 10 = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$ | $\int 20 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 = 42$ |

etc.

quae

quae ſummae ex cognito principio, quod ſumma diuiſorum producti $mnpq$, cuius factores $m$, $n$, $p$, $q$, ſiant inter ſe numeri primi, aequalis ſit producto ex ſummis diuiſorum ſingulorum, ſeu $\int mnpq = \int m . \int n . \int p . \int q$, pro maximis numeris facile definiri poſſunt. Ita eſt $\int 20 = \int 4 . 5 = \int 4 . \int 5 = 7 . 6 = 42$, et $\int 360 = \int 8 . 9 . 5 = \int 8 . \int 9 . \int 5 = 15 . 13 . 6 = 1170$. Conſiderat autem Auctor has diuiſorum ſummas, prout ſecundum ordinem numerorum naturalem, quibus reſpondent, progrediuntur hoc modo:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| numeri: | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. | 7. | 8. | 9. | 10. | 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | |
| ſummae diu. | 1. | 3. | 4. | 7. | 6. | 12. | 8. | 15. | 13. | 18. | 12. | 28 | 14. | 24. | 24. | 31. | etc. |

in qua progreſſione certe nulla lex ſpectatur, cum modo ſint maiores, modo minores, modo pares, modo impares, atque inprimis ordo numerorum primorum ei manifeſto immiſcetur, qui cum ſit inperſcrutabilis, quis in hac ſerie legem ſuſpicaretur? Interim tamen Auctor docet, hos numeros conſtituere ſeriem eius generis, quae recurrentes dici ſolent, ita vt quilibet eius terminus ex aliquot praecedentibus ſecundum certam quandem legem determinetur. Quemadmodum enim $\int n$ denotat ſummam diuiſorum numeri $n$, ita haec ſcriptura $\int (n - a)$ denotabit ſummam diuiſorum numeri $n - a$, quo obſeruato lex illa ab Auctore inuenta ita ſe habet, vt ſit:

$$\int n = \int (n-1) + \int (n-2) - \int (n-5) - \int (n-7) + \int (n-12) + \int (n-15) - \int (n-22) - \int (n-26) + \int (n-35) + \int (n-40) - \text{etc.}$$

vbi ratione ſignorum tenendum eſt, ſemper bina + excipi a binis −, numeri autem 1, 2, 5, 7, 12, 15, etc. continuo ab $n$ ſubtrahendi ex differentiis facile cognoſcuntur:

B numeri

numeri 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57 etc.
differ. 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, etc.

dummodo alternatim ſumantur. Commodius igitur illa relatio ita repraeſentabitur:

$$\int n = \begin{cases} +\int(n-1)-\int(n-5)+\int(n-12)-\int(n-22)+\int(n-35) \\ +\int(n-2)-\int(n-7)+\int(n-15)-\int(n-26)+\int(n-40) \end{cases} \text{etc.}$$

Pro applicatione autem huius formulae ad quosuis numeros, ſciendum eſt, hos terminos eo vsque tantum ſumi debere, quoad numeri poſt ſignum $\int$ ſcripti fiant negatiui, qui omnes ſunt omittendi; tum vero ſi occurrat terminus $\int(n-n)$, ſeu $\int o$, quia hic per ſe non determinatur, quouis caſu eius loco ipſum numerum $n$ ſcribi oportere. Per hanc ergo legem

erit: $\int 21 = \int 20 + \int 19 - \int 16 - \int 14 + \int 9 + \int 6$
ſeu: $\int 21 = \underline{42 + 20} - \underline{31 - 24} + \underline{13 + 12} = 87 - 55 = 32$

tum: $\int 22 = \int 21 + \int 20 - \int 17 - \int 15 + \int 10 + \int 7 - \int 0$
ſeu: $\int 22 = 32 + 42 - 18 - 24 + 18 + 8 - 22 = 100 - 64 = 36$

Ad hanc mirabilem progreſſionis legem deductus eſt Auctor conſideratione huius producti:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

cuius factores in infinitum progredi concipiuntur, quod ſi per actualem multiplicationem euoluatur, obſeruauit prodire hanc ſeriem:

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \text{ etc.}$$

quousque ſcilicet operationem actu continuare licuit, vnde legem huius ſeriei et exponentum progreſſionem tantum per inductionem concluſit, quod forte pluribus ſufficere videatur. Verum Auctor ingenue fatetur, hanc obſeruatam conuenientiam minime adhuc eſſe demonſtratam, ſed eius demonſtrationem etiamnum deſiderari, quam

autem

autem haud multo poſt cum Academia communicauit. Conceſſa autem aequalitate illius producti et ſeriei euolutae, Theorema memoratum circa ordinem in ſummis diuiſorum perſpicue inde demonſtratur, vt nullum amplius dubium ſupereſſe poſſit, etiamſi logarithmis et differentiatione ſit opus, quae res parum ad naturam diuiſorum pertinere videantur. Ex hoc ergo caſu intelligere licet, quam arcto et mirifico nexu Analyſis infinitorum, non ſolum cum Analyſi vulgari, ſed etiam cum doctrina numerorum, quae ab hoc ſublimi calculi genere abhorrere videtur, ſit coniuncta.

## III.

## Demonſtratio Theorematis circa ordinem in ſummis diuiſorum obſeruatum. Auct. L. Eulero.

### P. 75.

Hic Cel. Auctor id, quod in praecedente diſſertatione adhuc deſiderabatur, cumulate praeſtat, et demonſtrationem conuenientiae modo memoratae rigidiſſimam exponit. Quae etſi vulgaribus principiis innititur, tamen non exiguam ſagacitatem prae ſe ferre videtur. Quod ad ipſum argumentum attinet, id iam ſupra ſatis eſt explicatum.

## IV.

# De Methodo Diophanteae Analoga in Analyſi infinitorum. Auct. L. Eulero. pag. 84.

Methodus Diophantea, ab auctore antiquo Graeco *Diophanto* ſic dicta, potiſſimum ad doctrinam numerorum refertur, atque huiusmodi quaeſtiones reſoluere docet, quibus numeri quaeruntur, qui certa ratione combinati, euadant quadrati, vel cubi, aliusue generis numeri; veluti ſi quaerantur duo numeri, quorum quadrata addita iterum quadratum producant, cuiusmodi numeri ſunt 3 et 4, quorum quadrata 9 et 16 addita ſummam dant 25 itidem quadratum. In genere igitur ſi hi numeri ponantur $x$ et $y$, id requiritur, vt $xx+yy$ fiat quadratum, ſeu vt $\sqrt{(xx+yy)}$ ſit numerus rationalis, atque ſemper in ſolutione huiusmodi problematum peruenitur ad tales formulas radicales, ſiue radix quadrata, ſiue cubica, ſiue altioris gradus ſit extrahenda, numerosque iſti ſigno implicatos ita determinari oportet, vt radix re vera extrahi poſſit, omnisque irrationalitas euanescat. Ex quo methodum Diophanteam ita definiri poſſe patet, vt ſit methodus irrationalitatem tollendi. Quod autem in Analyſi communi ſunt quantitates irrationales, id in Analyſi ſublimiori ſunt quantitates tranſcendentes, quae oriuntur, ſi qua formula differentialis integrationem reſpuat, perinde atque ibi quantitates irrationales naſcuntur, quando ex quapiam formula radicem

radicem extrahere non licet. Methodus igitur in Analyſi infinitorum Diophanteae analoga in hoc verſatur, vt quantitates formulam quandam differentialem ingredientes ita determinentur, vt integratio ſuccedat, et integrale Algebraice exhiberi poſſit. Huiusmodi exempla ſtatim occurrunt, quando vel curuae quadrabiles, vel rectificabiles requiruntur, vbi poſitis coordinatis orthogonalibus $x$ et $y$, eiusmodi relatio inter eas deſideratur, vt priori caſu formula $y\,dx$, poſteriori vero haec $\int V(dx^2+dy^2)$ integrationem admittat. Problema quidem, quo curuae quadrabiles quaeruntur, eſt facillimum, atque adeo iam ante inuentam Analyſin infinitorum ſolui potuit, alterum vero de curuis rectificabilibus nonniſi per plures ambages a viris celeberrimis Hermanno et Bernoullio eſt ſolutum, vbi nullum veſtigium methodi cuiuspiam certae deprehenditur. Hic ergo quaſi nouus campus in Analyſi infinitorum aperitur antehac prorſus ignotus; methodus ſcilicet Diophanteae analoga, cuius principia Auctor in hac diſſertatione non ſolum diſtincte proponit, ſed etiam eo vsque proſequitur, vt problemata, quae alias vires Analyſeos longe ſuperare viderentur, nunc ſine vllo fere labore reſolui queant. Interim tamen haec methodus, quousque hic eſt exculta, plurimum adhuc a perfectione abeſt, relinquiturque ampliſſimus campus, in quo Geometrae vires ſuas exerceant, atque etiam ex hac parte fines Analyſeos proferant. Quanquam enim ab Auctore innumerabiles formulae differentiales ad integrabilitatem ſunt perductae, tamen plurimae ſuperſunt, quibus artificia hic tradita nondum ſufficiunt; veluti ſi eiusmodi quaeratur relatio inter variabiles $x$ et $y$, vt haec for-

mula $\int(\frac{y\,dx}{x} + \frac{dy}{y})$ integrationem admittat. Auctor fatetur ſe nullo adhuc modo id praeſtare potuiſſe. Verum dantur ſine dubio et in hac methodo caſus omnem reductionem reſpuentes, quemadmodum etiam in methodo Diophantea plurimae formulae, quae nullo modo ad quadratum reduci poſſunt. Plurimum igitur et hic praeſtitiſſe cenſendus erit, qui, cuiusmodi formulae ad reducendum plane ſint ineptae, dilucide oſtendere potuerit.

## V.

## De curuis funiculariis et catenariis, vel illis, quae corporibus flexibilibus induuntur, cum potentiis quibusuis ſollicitantur. Auctore G. W. Krafft.

pag. 145.

Celebre *Catenariae* problema, primus quidem aggreſſus eſt *Galilaeus*, in catenae flexilis libere ſuſpenſae figuram, aſt, quod ſuſpicandi plures habemus cauſas, non geometriae auxilio, ſed tentaminum atque experimentorum ope, inquirens. Facile itaque concipitur, qui factum ſit, quod vir ſummus, a ſcopo aberrans, catenulae curuaturam, parabolae affinem eſſe, adſtruxerit. Dicimus conſulto, *parabolae affinem*, incidimus enim in ſcriptorum *Galilaei* locum quendam, qui luculenter probat, non pro vera parabola habuiſſe ipſum, cate-

catenariae ductum, quod quidem communiter vitio ipſi verti ſolet. In libro enim de *Motu locali*, *Dial. IV. p. m.* 257. ſequentia inueniuntur verba: *Praeterea tibi dicere volo, ---funem ſic tenſum, et plus aut minus tractum, in lineas ſe flectere, quae ad parabolicas accedunt quam proxime, tantamque eſſe ſimilitudinem, vt ſi in ſuperficie plana et horizonti recta, lineam deſcribas parabolicam, eamque inuertas -- et extremitatibus baſeos appendas catenulam, eam magis aut minus demittendo, ſe incuruare et adaptare ad eandem videbis parabolam, eoque accuratiorem fore iſtam adaptationem, quo deſignata parabola minus fuerit curua, hoc eſt magis tenſa, ita vt in parabolis, quae ad eleuationem* 45 *gradus minorem* (loquitur hic *Galilaeus*, de parabolis, quas deſcribunt corpora grauia proiecta) *deſcriptae ſunt, catenula ad vnguem fere cum parabola congruat.* Totum hunc locum inſerimus, quo *Galilaei* partim exinde pateat innocentia, partim, vt de via, quam inquirendo catenulae figuram ſecutus eſt, conſtet.

Ex quo infiniteſimalis methodi principia innotuerunt, denuo idem problema tentarunt eruditi, atque mox, omnino a parabola diuerſam, ac ex tranſcendentium genere eſſe curuam, quae quaerebatur, deprehenſum eſt. Non ſolum autem plene ſolutum dederunt problema *Leibnitius*, *Bernoullii*, aliique complures, ſed ſimilia quoque alia excogitarunt, quales ſunt v. g. *velariae*, *funiculariae*, aliaeque huius generis curuae.

Huius

Huius non eſt loci, amplam methodorum, quarum ope huius generis problematum ſolutiones aſſecuti ſunt geometrae, inſtituere recenſionem; id tamen monemus, duplicis eſſe generis, quae hactenus prolatae ſunt, ſolutiones. Alii enim ex Statices praeceptis immediate ipſas deducunt; alii ex principiis aliunde cognitis, v. g. ex centri grauitatis figurae deſcenſu maximo poſſibili, eas repetunt.

Ad priorem claſſem pertinent, quas Clariſſ. ſcripti huius Auctor adhibuit methodos, qui in negotio, quod expediendum ſibi propoſuerat, ſequenti ratione procedit. Conſiderat primum filum flexile, cui finitum numerum potentiarum, qualemcunque hae habeant magnitudinem ac directionem, applicatam ſupponit, et formulam eruit, quae ſtatum aequilibrii eius, quod hinc naſcitur, polygoni determinat. Tum generalem hanc aequationem, ad caſum, vbi numero infinitae vires in filum agunt, (quo caſu non polygonum, ſed curua prodit) transfert. Conſiderat exinde eum primo caſum, vbi vires omnes in filum agentes curuaturae ipſius ſunt normales, atque poſtquam ſupra inuentam formulam generalem caſui huic adaptauit, deducit ex ipſa curuaturam, quam aſſumit filum, in quod agit fluidum elaſticum, quaqua verſus aequali vi expandere ſe nitens, ſiue *Velariam primi caſus*, prouti ipſam vocat Auctor, atque curuam, cui congruit filum, quod fluidum impulſu ſuo expandit, ſeu *Velariam ſecundi caſus*, et denique eam, quae dum filum a fluido, ex ſolo ſuo pondere agente, expanditur, oriri ſolet, quam *Linteariam* appellat.

Abſo-

Abſolutis his, ad conſiderandum eum caſum, vbi vires omnes in filum agentes inter ſe parallelae ſunt, Clariſs. Auctor, tranſit, cui poſtquam aptauit formulam generalem, deducit ex ipſa *catenariam vulgarem*, atque *non vulgares*. quorum nominum priori, eam, cui ſe adaptat filum vniformis vbiuis craſſitiei, altero, quam aſſumunt fila diuerſae in diuerſis punctis craſſitiei, denotat.

Affines denique alias quasdam curuas inueſtigat Auctor, *elaſticam* nempe, quam ſub hypotheſi, experimentis comprobata, atque Tom. III. Commentariorum Acad. noſtrae pag 71. expoſita, cum *lintearia* eandem eſſe demonſtrat, atque *curuam fornicibus conſtruendis aptam*, quam non ſolum, ſub hypotheſi fornicis infinite tenuis, ſed etiam datae, aſt vniformis vbiuis craſſitiei, cum *Catenaria vulgari*, atque *Velaria ſecundi caſus*, congruere probat.

## VI
## Subſidium calculi ſinuum. Auctore L. Eulero pag. 164.

Diuerſa genera quantitatum, circa quas Analyſis verſatur diuerſas etiam ſpecies calculi gignunt, in quo praecepta ad quodcunque quantitatum genus accommodari debent Ita in Analyſi elementari peculiaris traditur algorithmus, tam pro fractionibus, quam irrationalibus quantitatibus, tractandis. Idem vſu venit in Analyſi ſublimiori, vbi cum logarithmi et quantitates exponentiales,

quibus, nouum quantitatum genus, reuera tranſcendens conſtituitur, in computum ingrediuntur, peculiaris ſpecies Algorithmi, tam ſignis, quam praeceptis, diſtincta, tradi ſolet, quae ab inuentore Ioh. Bernoullio calculus exponentialis eſt vocata, ſiquidem ibi quoque doctrina de Logarithmis eorumque differentiatione et integratione tractatur. Praeter Logarithmos et quantitates exponentiales, aliud in Analyſi occurrit ampliſſimum genus quantitatum transcendentium, angulorum ſcilicet, eorumque ſinuum, coſinuum et tangentium, cuius vſus omnino eſt frequentiſſimus. Pari igitur iure hoc genus meretur, ac potius poſtulat, vt ei peculiaris calculus tribuatur, cuius inuentionem, quatenus quidem peculiaribus ſignis et praeceptis continetur, Cel. Auctor huius diſſertationis omni iure ſibi vindicare poteſt, cuius inſignia ſpecimina in introductione ſua in Analyſin et in Inſtit. Calculi differentialis dedit. Multo maxima autem eminent in eius ſcriptis de motu Lunae et perturbatione motuum Saturni ac Iouis, quod calculi genus deinceps etiam alii in huiusmodi inueſtigationibus frequenter ſunt ſecuti, ita vt hic ſine iſto ſubſidio vix quicquam praeſtari poſſe videatur. Huius igitur noui calculi, quem calculum ſinuum vocat, non ſolum prima fundamenta iecit Eulerus, eiusque ſummum vſum per varias Matheſeos partes plurimis egregiis ſpeciminibus oſtendit, ſed adhuc pergit eum nouis inuentis locupletare, quod praeſens diſſertatio luculenter declarat. In hac primum modo prorſus ſingulari ex primis ſinuum ac coſinuum proprietatibus vtiliſſimam illam reſolutionem poteſtatum ſinuum et coſinuum in ſinus coſinusue ſimplices deriuat, quae quidem reſolutio

maximi

maximi momenti eſt in applicatione huius calculi ad Aſtronomiam, vbi omnes inaequalitates ad ſinus coſinusue certorum angulorum reuocari oportet, tum autem in ipſa Analyſi, ac potiſſimum integrationibus, ſummum affert adiumentum. Deinde easdem inueſtigationes transfert ad producta, ex ſinus et coſinus poteſtatibus formata, in quorum reſolutione difficillimum eſt, legem, quam ſinus coſinusue ſimplices teneant, perſpicere. Denique etiam deducitur ad contemplationem ſerierum infinitarum, per ſinus coſinusue progredientium, quarum ſummas aſſignare docet, modo aeque facili ac foecundo, vnde plurima alia inſignia ſubſidia expectare licet.

## VII.

## De ſeriebus diuergentibus. Auct. L. Eulero pag. 205.

Argumentum hic ſibi Auctor tractandum ſumit, quod adhuc ſummis difficultatibus premebatur, atque opinionem illam, qua vulgo inueſtigationes mathematicae ab omni controuerſia immunes putantur, haud mediocriter debilitabat. Ineſſe autem in Matheſi eiusmodi ſpeculationes, circa quas ſummi geometrae maxime diſſenſerint, omnino negari nequit, neque hoc tantum in Matheſi adplicata vſu venit, quo pertinet famoſum illud circa vires viuas diſſidium, ſed etiam, quod inprimis mirum videatur, ipſa Matheſis pura et abſtracta, eximia litium obiecta ſuppeditauit, cuiusmodi eſt illa inter Leibnizium et

Ioannem Bernoullium agitata quaeſtio de logarithmis numerorum negatiuorum; tum etiam ex geometria quaeſtio de cuſpide curuarum ſecundi generis, ſeu roſtrum auium referente; quas controuerſias Noſter alio loco ita diremit, vt vtraeque partes, ſi adhuc eſſent ſuperſtites, in eius deciſione acquieſcerent. Similiter omnino comparata eſt quaeſtio de ſeriebus diuergentibus, quam Cel. Auctor hic aeque feliciter compoſuiſſe videtur, vt poſthac nullae amplius controuerſiae inde ſint pertimescendae. Quare etiamſi Analyſis cauſſis diſſidiorum non deſtituatur, eae tamen a caeteris hoc diſtinguntur, quod, omnibus rationibus probe perpenſis, tandem perfecte conciliari queant.

Conuergentes autem ſeries dicuntur, quarum termini continuo fiunt minores, atque tandem penitus euaneſcunt. Cuiusmodi eſt haec: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ etc. cuius ſumma quin ſit $= 2$, dubitari nequit. Quo plures enim terminos actu addideris, eo propius ad 2 acceſſeris; ita centum terminis additis defectus a binario valde parva erit particula, fractio nempe cuius denominator ex 30 notis conſtat, numeratore exiſtente 1. De huiusmodi ergo ſeriebus nullum eſt dubium, quin habeant ſummam, et quin eae ſummae, quae in Analyſi aſſignantur, ſint iuſtae. Diuergentes autem ſeries dicuntur, quarum termini non ad nihilum tendunt, ſed vel infra certum limitem nunquam decrescunt, vel adeo in infinitum excreſcunt. Huiusmodi ſunt $1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$ etc. item $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +$ etc. quarum quo plures termini addantur, eo maior prodit ſumma. Talis ſeries ergo quouis dato numero maior fieri poteſt, ideoque recte infinita

infinita dicitur, ſiquidem omnes termini in infinitum continuati, colligi in vnam ſummam concipiantur.

At ſi ſigna alternantia ſtatuantur, vt tales habeantur ſeries $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc. vel. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 -$ etc. nemini in mentem veniet, earum ſummam infinitam affirmare. Etiamſi enim poſterior, ſi bini termini iunctim capiantur, abeat in $-1 - 1 - 1 - 1$ etc. cuius ſumma eſt $-\infty$: tamen primo ſeparatim ſumto, ſequentium vero bini coniungantur, prodit $1 + 1 + 1 + 1 +$ etc. cuius ſumma eſt $+\infty$. Illo ſcilicet caſu numerus terminorum actu collectorum eſt par, hoc vero impar. Cum igitur ſerie in infinitum continuata, terminorum numerus neque par ſit, neque impar, ſumma etiam neque erit $= -\infty$, neque $= +\infty$, ex quo numero cuipiam finito aequalis cenſeri poterit.

Satis notae quoque ſunt controuerſiae ſuper ſerie: $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. cuius ſummam $= \frac{1}{2}$ Leibnizius ſtatuerat, alii autem negauerant. Nemo tamen eius ſummae alium valorem aſſignauit, ex quo controuerſia in hoc verſatur: vtrum huiusmodi ſeries certam habeant ſummam, nec ne? Hic ratio quaeſtionis in vocabulo *ſummae* eſt quaerenda, cuius idea ſi ita concipiatur, vt ſumma cuiusque ſeriei dicatur ea eſſe quantitas, ad quam eo propius peruenjatur, quo plures ſeriei termini actu colligantur, in ſolis ſeriebus conuergentibus locum habet, et a diuergentibus hanc ſummae ideam omnino remouere debemus. Quare qui ſummam ita definiunt, iis vitio verti nequit, ſi negant ſerierum ſummas aſſignari poſſe. Cum autem in Analyſi ſeries ex euolutione fractionum,

ſeu quantitatum irrationalium, vel etiam transcendentium, oriantur, in calculo viciſſim licebit loco cuiusque ſeriei eam quantitatem, ex cuius euolutione naſcitur, ſubſtituere. Quocirca ſi definitionem *ſummae* ita inſtruamus, vt cuiusvis ſeriei ſummam dicamus eſſe eam quantitatem, ex cuius euolutione ea ſeries naſcatur, omnia dubia circa ſeries diuergentes euaneſcunt, nullisque controuerſiis amplius locus relinquitur, quandoquidem haec definitio tam ad ſeries conuergentes, quam diuergentes aeque eſt accommodata. Ita Leibnizio quilibet ſine haeſitatione aſſentietur, ſeriei $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. ſummam eſſe $= \frac{1}{2}$, quia ex evolutione fractionis $\frac{1}{1+1}$ naſcitur; ſeriei autem $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$ etc. ſummam eſſe $= \frac{1}{4}$, quia ex euolutione formulae $\frac{1}{(1+1)^2}$ oritur. Similique modo iudicium de omnibus ſeriebus diuergentibus erit inſtituendum, vt ſemper ea formula finita inveſtigari debeat, ex cuius euolutione quaeque ſeries naſcatur. Saepe numero autem euenire poteſt, vt haec ipſa formula inuentu ſit difficillima, cuius Auctor hic eximium exemplum pertractat, iſtius ſeriei maxime diuergentis

$$1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - 5040 + \text{etc.}$$

quae eſt ſeries hypergeometrica Walliſii, ſignis alternantibus inſtructa, quae ex quanam formula originem trahat, et quantus eius formulae ſit valor, non niſi per profundiſſimas inueſtigationes, ex Analyſi ſublimiori petitas, definiri poſſe videtur. Re igitur variis modis tentata, Auctor tandem omnino ſingulari modo per fractiones continuas inuenit, huius ſeriei ſummam proxime eſſe $= 0,5963473621 23$, in qua fractione decimali error ne vltimam

vltimam quidem figuram afficit. Progreditur deinceps ad alias ſeries latius patentes, eiusdem generis, quarum ſummam ſimili modo aſſignare docet, voce *ſummae* ſcilicet ea ſignificatione accepta, quam hic ſtabiliuerat, et qua omnes controuerſiae praeſcinduntur.

## VIII.

## Diſſertatio de problematibus quibusdam calculi integralis. Auctore G. W. Krafft. p. 238.

Septem diuerſa, ac a ſe inuicem non pendentia, calculi integralis problemata, in Diſſertatione hac ſoluit Clariſ. Auctor. Etſi autem problematum iſtorum pleraque, olim iam ab aliis tractata ſint, a Perill. nempe *Goldbachio*, Celeberrimisque *Hermanno* atque *Bernoulliis*: nouae tamen ſunt, et ab hactenus cognitis diuerſae ſolutiones, hic ſuppeditatae, quod quidem inſtitutum fructu non carere, ſatis perſpicuum eſt.

Plura addere ſuperuacaneum ducimus. Lectores potius ad commentationem Clariſſ. Auctoris ipſam ablegandos eſſe, putamus.

---

PHYSICO-

# PHYSICO - MATHEMATICA.

## I.

## De Cochlea Archimedis. Auctore L. Eulero. p. 289.

Inter Machinas aquis hauriendis deſtinatas, cochlea Archimedis, cum ob antiquitatem, tum frequentiſſimum vſum, maxime eſt cognita, vt vix vllus rerum hydraulicarum ſcriptor repeiiatur, qui eius mentionem non faciat. Qua autem ratione aqua hauriatur, et quantae vires ad eam agitandam requirantur, vt data aquae copia ad datam altitudinem eleuetur, nemo fere quisquam determinare eſt conatus, ita vt, ſi ad Theoriam ſpectemus, haec machina nobis adhuc omnino incognita ſit cenſenda. Hoc ſcilicet fatum cum plerisque aliis Machinis commune habet, vt multo ante vſu fuerit recepta, quam ratione explorata. Tantum quidem abeſt, vt reliquarum Machinarum hydraulicarum perfectam habeamus cognitionem, vt potius Theoria vix vltra prima elementa ſit exculta: Verum de Cochlea Archimedis fateri cogimur, nos vix quidquam de ratione, cui actio eius innititur, intelligere. Non ita pridem enim demum vera motus fluidorum Theoria coli eſt coepta, cum antehac ne prima quidem eius principia fuiſſent cognita, et quae adhuc in ea ſunt ſummo ſtudio explorata, vix ſimpliciſſimis Machinis hydraulicis ſolide explicandis ſufficiunt. Cochlea autem Archimedis omnino ad intima huius ſcien-

ſcientiae penetralia eſt referenda, cum aqua non per tubos fixos, vti in reliquis plerisque Machinis fit, ſed per mobiles promoueatur, cuius motus ratio profundiſſimas inueſtigationes poſtulat. Auctor igitur minime huius Machinae Theoriam perfecte explicaſſe gloriatur, ſed operam dedit, vt eam ex craſſiſſimis tenebris, quibus adhuc erat inuoluta, protraheret, eique aliquam ſaltem lucem affunderet. Difficultas quidem praecipua non tam in principiis motus eſt ſita, quam in ipſius Analyſeos ſubſidiis; totam enim Theoriam ſatis feliciter ad calculum reuocare licuit, cuius autem euolutio vires, quas adhuc ſumus adepti, ſuperare videtur. De modo autem, quo Auctor hoc arduum argumentum pertractauit, vix quidquam afferre licet, quod, niſi vniuerſa Analyſis ſimul explicetur, intelligi queat, vnde lectores ad ipſam Diſſertationem remittimus, vbi complura notatu digna, et quae maxime paradoxa videantur, inuenient. Inprimis autem optandum eſt, vt et alii Geometrae hac occaſione excitentur, ad idem argumentum, quisque ſuo more, ſcrutandum, quo tandem pleniorem huius Machinae Theoriam conſequamur, ex qua ipſa praxis perfici queat.

## II.

## De aptiſſima figura rotarum dentibus tribuenda. Auct. L. Euler.

### pag. 299.

De figura, quam dentibus rotarum dari conueniat, varii Auctores, vario conſilio, ſunt commentati,

quoniam plures ſunt circumſtantiae, ex quibus iſta figura determinari poteſt. In hac Diſſertatione duplex finis proponitur, alter vt dum dentes duarum rotarum in ſe inuicem agunt, nulla oriatur frictio, ſed dentes ita alter ſuper altero incedant, quemadmodum circulus ſuper plano volui concipitur, dum cycloidem deſcribit. Alter finis autem eo tendit, vt dum altera rota vniformiter circumuoluitur, alteri rotae etiam motus vniformis imprimatur. Quodſi has ambas conditiones ſimul implere liceret, nullum eſt dubium, quin ea dentium figura, quae hoc praeſtaret, eſſet perfectiſſima. Maximi enim eſt momenti attritum in mutua dentium actione euitare, quandoquidem hoc modo Machina diutiſſime in ſtatu ſuo conſeruari poſſet. Haud minoris autem eſt momenti altera conditio, quoniam in omnibus Machinis vniformitas motus multum ad effectum augendum confert. Oſtendit autem Auctor non ſolum vtrique conditioni ſimul ſatisfieri non poſſe, ſed etiam priorem ſolam nullo modo impleri poſſe. Cum igitur dentium attritus eiusmodi ſit incommodum, quod effugere minime licet, Auctor inquiſitionem ſuam ad ſolam alteram conditionem dirigit, ac dentes ita formare docet, vt, dum motus rotae impellentis eſt vniformis, motus etiam propulſae fiat vniformis. Haec autem nimis videntur ſubtilia, quam vt in praxi vſus inde expectari poſſit.

---

PHYSICA

# PHYSICA.

## I.

## Alkekengi, calyce profunde diuiſo, fructu ſicco.

## II.

## Thlaſpi, ſiliculis ellipticis, foliis lanceolato-linearibus, integerrimis.

## Auct. Io. Chr. Hebenſtreit. p. 319. et 330.

Cum non ſemper et vbique occaſio ſit Botanicis, nouas in medium proferre plantas, illarumque deſcriptione rem herbariam auctiorem reddere: illi quoque officio ſuo ſatis feciſſe cenſendi ſunt, qui plantas ab aliis deſcriptas iterato examini ſubiiciunt, qui, quod in prioribus deſcriptionibus erratum eſt, corrigunt, quod mancum, ſupplent, qui icones ad viua exemplaria emendatiores dare allaborant. Hoc eſt, quod Cl. Auctor, in vtraque Diſſertatione ſupra allegata, praeſtare conatus eſt.

In priori cum *Feuilletio* ipſi res eſt, qui *Alkekengi* plantam, originis Americanae, in obſeruationibus ſuis Phyſico-Mathematico-Botanicis, primus deſcripſit et delineatam dedit. Hunc noſter vbiuis corrigit et ſupplet. Supplet etiam, quae Ill. *Linnaeus* in Spec. Plant. 1753 de hac planta dixerat, et *Alkekengi* proprio ſuo generi

generi reſtituere maluit, quam cum Ill. *Linnaeo Atropae*, ſeu *Belladonnae*, adiungere.

Alterius plantae integram hiſtoriam *Hebenſtreitius* contexuit, nouamque eius deſcriptionem et iconem ideo potiſſimum ſuppeditauit, quia Ill. *Linnaeus* in Spec. plant. 1753. illam aſteriſco notauerat, vt aſſolet, ſi plantas, a ſe ipſo non ſufficienter exploratas, aliorum vlteriori perſcrutationi commendat. Hinc laborem ab Auctore exantlatum omnibus rei Botanicae ſtudioſis gratum fore confidimus.

## III.

## Animalium quorundam quadrupedum deſcriptio. Auctore Io. Geo. Gmelin. p. 338.

Pergimus in obſeruationibus Gmelinianis ad Hiſtoriam animalium facientibus cum Hiſtoriae naturalis amatoribus communicandis: et hoc quidem loco nouem animalium deſcriptiones damus, maximam partem Sibiriae propriorum, quarum pleraeque etiam iconibus illuſtratae ſunt, inſpiciente ſemper Auctore, ad viua animalia, maxima cum cura adumbratis.

### *Muſtela Zibellina.*

Vix Sibiriam ingreſſus erat *Gmelinus*, vix Tobolſk vrbem, metropolin regni, primo limine ſalutauerat, cum Guber-

Gubernator toti prouinciae regendae praefectus, vir integerrimus et ſi quis alius laboribus noſtris litterariis fauens, *Alexius Leonis filius Pleſchtſcheew*, dulce oculis ſpectaculum exhiberet, duas Martes Zibellinas, viuas, Petropolin in aulam Imperatoriam mittendas. Non neglexit noſter tam opportune ſibi oblatam occaſionem; animalis externam formam deſcripſit, et depingi curauit, quae de moribus eius narrari audiuit, litteris conſignauit. Plura praeſtaſſet, niſi deſtinatio animalium id prohibuiſſet. Euentus docuit, optime feciſſe illum, quod deſcriptionem non diſtulerit, donec perueniret in eas regiones, quae alias Zibellinarum copia celebres laudantur. Nam poſtmodum, tota licet peragrata Sibiria, nunquam amplius ipſi obtigit, Muſtelam Zibellinam viuam, imo ne mortuam quidem, pelles excipio, videre. Quodſi cui mirum videbitur, notare operae pretium eſt, haec animalia, quae olim omnia triuia occupabant, nunc tam procul habitare, vt non niſi plurium dierum itinere, a quauis, etiam remotiſſima, Sibiriae vrbe, perueniatur ad ea loca, quae a venatoribus, Zibellinarum capturae intentis, frequentantur. Quid feciſſet *Gmelinus*? Aliquem ex noſtris eo mittere, minus tutum videbatur; iubere, vt venatores animalia, quae caperent, integra adferrent, nullius vtilitatis fuiſſet. Namque homines iſti, Deum hominumque iram muneribus placare aſſueti, nihil ſanctum habent, niſi quod lucrum illis affert, neque facile a praefectis vrbium ad aliud quid obligantur. Praeterea mira ſuperſtitio inter illos regnat, qua piaculo habent, ſi, detracta pelle, cadauera Zibellinarum ab impuris manibus attrectarentur. Non ſecus, ac ſi propinquorum

cadauera efferenda eſſent, illa ſuffitu colunt, et cum reuerentia terrae mandant. Sperauimus quidem, haec obſtacula nos remoturos eſſe, ſi aliquando ipſi in itinere comprehenſi in loca, vbi Zibellinae caperentur, incideremus. Sed nec nobis tam felicibus eſſe contigit, nec *Stellero*, nec *Kraſcheninikouio*, etiamſi hi in Kamtſchatkam vsque penetrarint, vbi et nunc quoque Zibellinarum inſignis copia eſt. Ecce quomodo factum, vt praeter Zibellinas Tobolii viſas, nemo noſtrum alias propriis oculis luſtrauerit. Ecce rationem, cur Cl. *Gmelinus*, id quod alias ſolet, partes internas animalis non examinauit. Aſt inquies, multa alia neglexit ad pleniorem animalis cognitionem facientia, quae deinceps in itinere ſupplere potuiſſet. Non neglexiſſet ſane, niſi reliquas de hoc tam raro animante notitias colligere, mihi ſumſiſſem. Has legat, cui volupe eſt, in Tomo III. *Collectionis notitiarum ad Hiſtoriam Ruſſicam pertinentium* vbi diuerſitatem Zibellinarum pro diuerſis regionibus, in quibus habitant, et quae mercatoriam pellis cognitionem iuuant, deſcripſi. Ea quae ad venationem Zibellinarum ſpectant, *Gmelinus* et ego, cum circa Lenam fluuium verſaremur, coniunctim explorare ſtuduimus. Notata lingua Ruſſica digeſſit interpres *Elias Iachontow*, et poſtmodum in deſcriptione Kamtſchatkae *Stephanus Kraſcheninikow* publicauit. Hic liber lingua Ruſſica conſcriptus, omnino multa continet Hiſtoriam tam politicam, quam naturalem, inprimis autem Geographiam et mores gentium egregiae illuſtrantia; quare ſuademus, vt aliquis, cui otium eſt, illum in aliquam exteris quoque notam linguam transferre allaboret.

*Vacca*

*Vacca grunniens, villoſa, cauda equina.*

Fera eſt Calmuccicis Tanguticisque terris indigena, quam pariter apud Excell. Gubernatorem Sibiriae, ſupra laudatum *Pleſchtſcheew*, Tobolii videre licuit. Vah! quam indomitum animal, quod neque leui digito attrectari ſe patiebatur. Etiamſi autem deſcriptio ob hanc rationem ex ſolo externo adſpectu confecta ſit: nihil tamen ad plenam de hoc animali cognitionem deeſſe adparet. Addita poſtmodum nonnulla ex lectione *Rubruquiſii* et ex relatione Calmuccorum hauſta. Haec, vt deſcriptionem a *Gmelino* confectam, mirifice illuſtrant, ſic quoque *Rubuquiſii* fides *Gmelini* opera in tuto eſt, etiamſi poſt illum nemo huius ferae meminerit, cui ideoque Zoologi nullum adhuc locum in ſuis ſcriptis tribuerunt. Generatim in hoc paſſu ſaeculi noſtri felicitas depraedicanda eſt, quo plus, quam omnibus retro ſaeculis, in deſcribendis Aſiae remotioribus regionibus, multi egregii viri elaborarunt. Nunc quae *M. Paulus Venetus*, quae *Ioannes de Plano Carpinus*, quae *Guilielmus Rubruquis*, quae *Baco*, quae *Aſcelinus*, quae *Vincentius Bellouacenſis*, quae *Haito Armenus*, ſaeculis iſtis barbaris et inficetis memoriae tradiderunt, non amplius faſtidienda eſſe edocemur, cum potius occaſio frequens ſit, illorum relata illuſtrare, corrigere, et nouis argumentis confirmata denuo orbi erudito exhibere.

*Ouis laticauda.*

Huius quidem notitiam dudum habent Hiſtoriae animalium ſcriptores, at mancam, et ex parte anilibus fabulis con-

conſpurcatam. Fuerunt, qui ſecundum *Herodotum* L. II. et *Aelianum* L. X. C. 4. ſimiles noſtris oues depictas dedere, caudas tricubitales in vehiculis poſt ſe trahentes. An ergo natura animalia producit, propriae ſuae molis ſuſtinendae imparia? Primum, ſi non feras, tamen nullius poſſeſſionis, omnis generis beſtias fuiſſe, in confeſſo eſt. Quis ergo, antequam in proprietatem dominorum cederent, caudas vehiculis alligauit? Aſt errant, qui haec de noſtris ouibus intelligunt. Nam Auctores ſupra excitati, longis caudis praeditas, a laticaudis, clare diſtinguunt. Alius autem erroris rei ſunt illi, qui, iisdem ducibus, Arabiam ſolam pro patria horum pecorum venditarunt. Nunc enim ſatis conſtat, haberi oues laticaudas per omnem Aſiam auſtralem ad Sinas vſque; ſi vero vltra quinquageſimum tertium aut quartum gradum latitudinis transplantantur, degenerare. Cauda vnica fere corporis pars eſt, quae illas ab aliis ouibus diſtinguit. Sed qui cauda? Maſſa potius eſt adipoſa, nullis oſſibus inſtructa, tantum non immobilis, cuius latitudo longitudinem fere aequat. Septo quodam in duas partes ita diuiditur, vt poſt pellem detractam figura ſua nates humanas referre videatur. Hinc quoque Ruſſi non caudam, ſed *Kurduk*, vocant, vocabulo a Tataris mutuato, a quibus hae oues primum in Ruſſiam illatae ſunt. Adeps huius Maſſae duriuſcula eſt, illi, quae ſternum tegit, non abſimilis; communiter in eſcam cedit, ab aliis autem, qui neſcio quid hircini ſaporis ſentire ſe praetendunt, non aeque appetitam. Naturae ſcrutatores explicent, quem haec maſſa informis atque ignaua animali vſum praeſtet? *M. Paulus Venetus* L. 1. c. 22. de regione Camandu: Arietes illius

illius regionis non minores ſunt aſinis, caudam ferentes tam longam et latam, vt triginta librarum pondus habeant. *Ionſtonus* de Quadrup. L. II. c. 2. Art 3. Cauda aliquando viginti ſex, aliquando quadraginta libras pendit. Haec nimium exaggerata praedicare non dubito. Quae *Gmelinus* de duplici genere ouis laticaudae aſſerit, altero longiori, altero breuiori cauda inſtructo, me neſcire profiteor, niſi forte *Turcomannicas* oues intellexit, quae quandoque, vt Orenburgo amicus ad me perſcripſit, apud Kirgiſicos Caſaccos, poſtquam in praedam illas acceperunt, venum proſtant. Sunt autem Turcomanni gens, Ruſſice *Trucbmenzi* dicta, Turcarum veterum progenies, rapinis adſueta, littus orientale Maris Caſpii, ex auſtro lacus *Aral*, inhabitans. Oues iſtae etiam *Buchariçae* adpellantur, veluti per omnem Buchariam reperiundae. Magnitudine Ruſſicas communes oues vix excedunt. Pedes his breuiores habent. Cauda longa, duos digitos lata, minori denſitate. Lana valde mollis eſt et criſpa, in agnis praecipue, quorum itaque pelles, inprimis recens natorum, aut foetuum partui proximorum, caro pretio emuntur.

### *Sciurus minor virgatus.*

Animalculum praeter Sibiriam in Africa quoque et in America ſeptentrionali reperiundum. Non magnitudine tantum et ſtriis in dorſo nigricantibus, ſed moribus etiam, dum ſub terra habitat, a Sciuro vulgari differt. Conferri poſſunt, quae *Catesby* in Hiſt. nat. Carolinae Vol. II. p 75 cui *Sciurus ſtriatus* dicitur, nec non V. Cl. *Petrus Kalm* in Diario itin. Amer. d. 14 Nouembr. 1748.

 verſ.

verſ. germ. Goetting' p. 462. de hoc Sciuro habent. Vtriusque deſcriptio ex hac noſtra Gmeliniana ſuppletur. Icon quoque a *Gmelino* ſuppeditata poſt Catesbianam, quantumuis perelegantem, vt quae hoc animalculum in naturali magnitudine ſiſtit, non ſuperflua videri poteſt. *Gmelinus* adſcripſit nomen *Furunculi Sciuroidis* a *Meſſerſchmidio* mutuatum. Nos ex ſchedis Meſſerſchmidiaris etiam reliqua ad hoc animal pertinentia huc transſcribemus: „ *Dſiraeku* Mongolis in Dauuria; *Iiraeku* Buraetis; *Kaeryk*, Kiſtim-Tataris; *Buruaduk* Ruſſis, Indis cis Gangem *Kœthó*; Tunguſis *Ulguaki*; *Dencka* Aſtiaccis ad Ieniſeam; *Kôop* Ket-Aſtiaccis; Narim-Aſtiaccis *Scheépek*; Surgut-Aſtiaccis *Kudſcheger*; Furunculus Sciuroides Sibiricus, υπογαιτης, bucca vtrinque moſchatae nucis capace, ſupine ſtriis quinque nigris, totidemque fuſcis, a nucha ad caudam lyratim pictus, cauda debilius variegata, piloſa plane, prone in cinereo pallens, pedibus vbique pentadactylis, miti genio, nudis manibus tractabilis et domeſtico conuictui facile aſſueſcens. Muſtela Africana Clus Muſtela forſan Libyca Nieremb. Sciurus getulus Ionſt. „ Hactenus *Meſſerſchmidius*. Obſeruabit prudens lector, et hic quoque extare quaedam a citatis auctoribus, imo a *Gmelino* quoque, praetermiſſa. Vnum eſt, in quo *Gmelinus* *Meſſerſchmidio* contradicit. Notandum autem, non omnibus ſcriptis Meſſerſchmidianis *Gmelinum* in itinere inſtructum fuiſſe. Si haec talia legiſſet, certe diſſenſum ſuum a praedeceſſore in re, quae notam characteriſticam animalis conſtituit, digitorum numerum puta, pluribus illuſtraſſet. Iuuat quidem *Meſcherſchmidium*, quod in icone quoque

Cates-

Catesbiana pedes vtrinque pentadactyli repraeſentantur. At hic error poteſt eſſe pictoris. *Catesby* aeque ac *Kalmius* de numero digitorum ſilent. E contrario pugnat pro *Gmelino*, quod illuſtris etiam *Linnaeus* in Syſt. nat. ed. nov. p. 64. palmas tetradactylas habet, plantas pentadactylas. Praeterea in numero ſtriarum diſſenſus regnat. *Linnaeus* l. c. et in Muſeo Sereniſs. Regis Succiae p. 8. non niſi quatuor numerat, *Gmelinus* cum *Meſſerſchmidio*, imo *Kalmius*, quinque. An forſitan ſtria in medio dorſo non in cenſum venit, veluti aliis quoque animalibus communis? Denique *Meſſerſchmidio*, mitem animalculi genium laudanti, contradicit *Kalmius* p. 465. Ex hoc nihil aliud conſequitur, quam quod mores Sciuri ſtriati Sibirici, a moribus animalculi congeneris Americani ſint diuerſi.

## *Ibex imberbis.*

De hoc animali iam diximus nonnulla in Summario Tomi IV. Comment. p. 60. correximusque errorem *Stelleri*, qui illud pro *Caprea Monocerote* vendiderat. Nunc, quod ibi promiſimus, plenam eius deſcriptionem damus. Vnicum deeſſe videtur, quod praetereundum nobis non eſt. Ibex hic, paſcens in campis, nunquam anticipat gradum, ſed ſemper retrograditur, neque aliter herbas reſecare poteſt, ob prominentiam labii ſuperioris, quae impedimento foret vltra progredienti, at recedenti gramina colligere opitulatur. *Gmelinus* citat *Herberſteinium*. Locus eſt in Script. rer. Moſcou. p 84. et apud *Ionſton*. Tom. II. Ed. *Ruyſchii* p. 45. Cornua Sinenſes emunt,

emunt, ſiue ad vſum medicum, vt nonnulli putant, ſiue ad laternas conficiendas, quas quo artificio fabricare ſoleant, haud ita pridem edocti ſumus a R. P. *d'Incarville* in Comm. Academiae Scient. Pariſienſi ab exteris communicatis Tomo II. p. 350. Figura animalis deficit. Accidit enim *Gmelino*, quod in rebus quotidie nobis obviis, vt illas procraſtinemus, fieri ſolet. Delineatio cum de die in diem differretur, nulla facta eſt; neque in reditu fieri potuit, quia tunc regiones magis ad ſeptemtriones ſitae inuiſendae erant, vbi huius animalis nec vola, nec veſtigium. Nam vltra 54 gradum latitudinis non excurrit. Orientem verſus Obium fluuium raro ſuperat.

## *Caprea campeſtris gutturoſa.*

Haec nulla alia eſſe videtur, quam *caprea flaua*, Sinis *Hoang yang* dicta, de qua apud *Du Haldium* Tomo IV. p. 34. 119. 159. 333. Ed. in forma quadripartita, varia leguntur, non inutilia quidem, aſt Hiſtoriae animalium ſcrutatori minus accommodata. Deſcriptio *Gmeliniana* omnia praeſtat, quae iure expectare poſſis. Namque non in externa tantum forma depingenda verſatur, ſed anatomen quoque gutturis ſiſtit, characterem animalis ingredientis. Fatendum autem, hanc pleniorem futuram fuiſſe, niſi itineris ratio et tempus, quo inſtituta eſt, aeſtiuum id impediuiſſent. Adfert *Gmelinus* nomen, quod *Meſſerſchmidius* iconi animalis a ſe factae adſcripſit. Aſt hoc mancum eſt. In codice Manuſcripto Bibliothecae Academicae, qui *Sibiria perluſtrata* inſcribitur, ita *Meſſerſchmidius*: „ Ohna, Dſeren et Schar-

„ choe-

„choechtſchi Mongulis in Dauuria; Caprea campeſtris „hydrophobos gutturoſa, cornibus non ramoſis, circellatim vndulatis, ſinu gemino leuiter inflexis, biſulca, „aigurinos, ruminans, pelle piliſque capreoli, folliculo „vmbilicali, at fatuo, praedita; an Caprea Bezoardica „Maioris, Eph. Nat. Cur. Anni VIII. et Lochneri „Rariora Muſei Besleriani Tab. X. N. 3. et 4." Si habitum corporis ſpectes, ab Ibice imberbi non multum differt. Caro etiam vtriusque boni ſaporis eſt, eiusdem fere, quo *Caprea Plinii*, quae rara eſt in regionibus trans Baikalem lacum ſitis, cis Baikalem autem, vbi *Dſeren* non habitat, abundat.

*Cuniculus pumilio ſaliens.*

Conferri merentur, quae *Haſſelquiſtius* de hoc animalculo, in Aegypto etiam reperiundo, obſeruauit. Acta Acad. Scient. Suec. 1752. Ed. Germ. p. 129. Ill. *Linnaeus*, qui illud in Syſt. nat. Strahlenbergium ſequutus, Leporum familiae adnumerauerat, nunc in vltima editione libri ſui ſecundum *Haſſelquiſtium*, muribus accenſet. Et certe leporem ſolo capite et auribus aemulatur, toto corporis habitu differt, vt longiori, reſpectu molis, ac tenero valde, imprimis autem pedibus et cauda, ſicut tam ex deſcriptione, quam ex icone, liquet. Nomen *Leporis volantis* apud *Strahlenbergium* illis tantum placere poteſt, qui miracula ſectantur, naturae regulis minus contenti. Nullis enim ad volatum organis inſtructum animal eſt. Melius Ruſſi, qui Leporem ſub terra degentem, земляной заецъ, adpellant, quos imi-

tatus *Gmelinus* , *Meſſerſchmidii* exemplo , *Cuniculum* vocauit. Iucundum , ſi quod aliud , adſpectu animal eſt, quod nos ſaepe numero non minus agilitate in cuniculis fodiendis, quam in ſaliendo, in ſtuporem coniecit. Formauimus aliquando circulum in campo plano, quinquaginta et amplius hominum , preſſe ſibi inuicem adſtantium , animalculum in centro reponentes, quod cum poſt quaedam tentamina inutiliter facta , effugere deſperaret, mox ad cuniculum fodiendum ſe adplicauit , et breui valde temporis interuallo laborem ita promouit , vt in terram prorſus ſe occultaſſet, niſi a nobis mora iniecta fuiſſet. Cum digitorum numerus ab Ill. *Linnaeo* aliter , ac a *Gmelino* , tradatur, non inutile erit obſeruare , quod *Haſſelquiſtius* e contra *Gmelino* aſſentit , eoque ipſo accurationem noſtri in obſeruationibus faciendis et deſcribendis confirmat.

## *Cuniculus inſigniter caudatus.*

Animal campis Mongolenſibus, qua ſub Ruſſorum dominatione ſunt, proprium , quod habitu corporis et colore pilorum leporem exacte refert , cauda tantum et moribus ad Cuniculum magis accedentibus differt. Hac ſimilitudine inducti Mongolenſes vocabulum *Tolai* , quo leporem vulgarem deſignant , huic quoque adplicant. Ruſſi autem iſtarum regionum , ad diuerſitatem allegatam reſpicientes, Mongolicum nomen retinere malunt , quam ſuum dare. Haec notare ſufficiat ; reliqua, quae ex ipſa deſcriptione pateſcunt, ſuperuacaneum foret huc transſcribere.

*Iſatis*

## *Iſatis*, *Ruſſis Peſez*.

Agmen animalium hoc loco exhibitorum claudit *Iſatis*, non ignotum quidem Zoologis animal, quia Norvagiam quoque et Lapponiam inhabitat, at a nemine adhuc deſcriptum. Putarunt forſitan viri docti, dum vulgus illud vulpibus accenſet, non opus eſſe ſingulari deſcriptione; ſufficere, ſi colorem pilorum indicent. At erraſſe illos, *Gmelinus* luculenta expoſitione eorum, quae de hoc animali obſeruauit, aut narrari audiuit, demonſtrat. Recte Ruſſi et omnes gentes alienigenae, maris glacialis accolae, nomen ipſi a vulpe diuerſum indidere. Ruſſicum *Peſez* ex Slauonico *Pes*, quod *canem* denotat, dignitatem rei minuendo, confectum eſſe videtur, ob faciem fortaſſis, caninam magis, quam vulpinam; reliquae enim diuerſitates Iſatidis a vulpe, a *Gmelino* enumeratae, non ita in ſenſus cadunt, fatendum potius, externum corporis habitum, imo et latratum, a vulpe diſſimilem non eſſe. Venatores Sibirici Iſatides etiam inter ſe, candidas a cinereis, ſpecie differre aſſerunt. Sane ſi certum eſſet, quod nonnulli volunt, a candidis ſemper candidas; et a cinereis ſemper cinereas, niſi vtrarumque mixtio accedat, gigni, nullus dubitationi locus relinqueretur: aſt fuere, qui aſſeuerarunt, numquam omnem prolem vnius matris eiusdem coloris obſervari, hoc vero certum eſſe, catulos cinereos inter candidos rariores conſpici; et haec ratio eſt, cur *Gmelinus* nihil certi de hac diuerſitate ſtatuit, imo magis iis, qui diuerſitatem pilorum pro ſola varietate habent, fauere videtur. Dum in partes animalis internas auctor inquirit, de

de vſu folliculorum, fortem odorem ſpirantium, tanquam in tranſcurſu, quaedam diſputat, lectori, vt opinor, non ingrata futura. Apparet illum emendare voluiſſe, quae *Io. Raius* in Synopſi Quadrup. de eadem materia tradidit. Conſtat autem tradidiſſe neminem illo melius. Sicque *Gmelini* opera magni aeſtimanda, ſi vſum folliculorum certius, ac alii, demonſtrauit. Reſtat verbulum dicere de nomine *Iſatidis*, quod ex *Ionſtono* ſe deſumſiſſe *Gmelinus* ait. Verum quidem, ſi *Ionſtonum* conſulimus, nomen hoc, tamquam vulpis ſpeciem indigitaturum, ibi reperiri: at eodem loco etiam vulpes albae memorantur, in Suecia, Noruagia et circa Nouam Zemlam reperiundae, quae tamen nullae aliae ſunt, quam Iſatides a *Gmelino* deſcriptae. Praeterea non liquet, vnde *Ionſtonus* hoc nomen deſumſit. Hoc certum eſt, ab antiquitate illud abhorrere, quae non niſi plantam ſub hoc nomine cognitam habet. Quod ſi ergo dubitauerint alii, *Gmelinum* in hoc paſſu ſequi, per nos licet. Contra auctoris ſententiam nomen immutare duximus nefas.

## IV.

## Obſeruationes Meteorologicae Petropoli factae. Auctore I. A. Braun.

p. 373.

Non neceſſarium videtur, de his aliquid monere, praeterquam, quod Cl. Auctor proprias ſuas obſeruationes communicet, ex eo tempore, quo Petropolin

polin aduenit inſtitutas., cum in praecedente Tomo Commentariorum non niſi alienas dederit, ex tabulario Academico ſecum communicatas.

Accedunt obſeruationes Barometricae et Thermometricae itemque magneticae a *R. P. Amioto* S. I. Pekini habitae, et cum Petropolitanis, quoad magneticas etiam cum Sibiricis, comparatae.

## V. et VI.

## Obſeruationes Meteorologicae Tubingenſes annorum 1750. 1751. et 1752. Auct. Geo. Wolffg. Kraft. p. 400. et 407.

Praeter accurationem, qua hae, vt omnes aliae a Cel. Krafftio inſtitutae obſeruationes, ſe commendant, notari merentur vtilitates, quas per octennium ex ſuis laboribus hauſiſſe Auctor profitetur. Namque ex barometricis obſeruationibus inter ſe comparatis patet loci eleuatio ſupra Oceanum, quae, ſi de multis locis aeque exacte conſtaret, viam ſterneret ad figuram telluris particularem ac ad atmoſphaerae naturam melius cognoſcendam. Ex Thermometricis autem calor medius quouis menſe expectandus innoteſcit, tam plantis educandis, quam aliis rebus oeconomicis vtilis.

# ASTRONOMICA.

## I.

## Solutio noui cuiusdam problematis Aſtronomici, in vſum praecipue nauticum propoſiti, in Diſſertatione de progreſſu artis nauticae, in determinanda Maris et Longitudine, et Latitudine. Auctore A. N. Griſchow. p. 417.

Indicauerat Clariſs. Auctor, in ſermone, *de artis nauticae progreſſu, in longitudine et latitudine Maris determinandis*, quem A. 1751. d. 6. Septembris, in publico Academiae Conuentu, praelegit, defectus quosdam, quibus vulgares Methodi, quarum ope vtuntur nautae, ad tempus determinandum, laborant. De ſecuriori itaque Methodo inuenienda ſollicitus, in aliquam incidit, quae erroribus, qui a conſuetis Methodis timendi ſunt, fere immunis eſt. Iubet nempe, vt duae eligantur fixae, eandem circiter habentes altitudinem, altera ortum verſus, altera ad occaſum, a Meridiano diſtans, harumque vno eodemque inſtrumento ſucceſſiue obſeruentur altitudines, notato, quod inter vtramque obſeruationem intercedit, temporis interuallo. Peractis his, detectaque ſic per immediatam obſeruationem, ſtellarum obſeruatarum differentia altitudinum, magna exinde cum ſecuritate, calculi non admodum laborioſi ope, tempus deduci poteſt.

In

In ſermone ſupra indicato, mentionem huius Methodi paucis iniecerat Clariſs. Auctor, in praeſenti autem diſſertatione, id iam agit, vt calculi, cuius hic opus eſt, inſtituendi modum data opera exponat, reliquasque, quae obſeruandae ſunt nautae, qui Methodum hanc in vſum vocare cupit, cautelas, explicet.

Recenſentur primum Methodi huius commoda, quae huc fere reducuntur, quod nihil timendum ſit, neque a refractionum diuerſitate ac inconſtantia, neque ab Horizontis ſenſibilis inclinatione, neque tandem ab erroribus, in differentia altitudinum, aut obſeruatoris, aut inſtrumenti vitio, commiſſis. Deinde ipſa calculi inſtituendi ratio luculenter exponitur, cuius, qui ſibi formare voluerint ideam, ad legendam ipſam diſſertationem ablegandi ſunt. Pendet autem hic calculus, atque cognitam ſupponit Poli eleuationem, vnde, cum minus ſecura eſſe poſſit huius determinatio, timendi locus eſſe poteſt, ne in hoc calculi elemento commiſſi errores, magnos in temporis quoque determinatione inde deducta procreent errores. Tollit autem hoc dubium penitus Clar. Auctor, verſus diſſertationis finem, vbi commonſtrat, errores in Poli altitudine tantos, qui euitari facile poſſunt, vix ſenſibilem in tempore inde deducto procreare errorem, modo rite eligantur Stellae, in quibus obſeruatio inſtituatur. Ne itaque quid habeant, quod deſiderent nautae, peculiari disquiſitione, regulas, quas ſequi oportet, in eligendis Stellis, vt temporis determinatio, ex differentia altitudinum eruenda, ab errore in eleuatione Poli admiſſo ſit tutiſſima, conſtituit.

## II.

## Errorem Tabularum Lunarium ex Eclipſibus Solis — definiendorum disquiſitio Auctore A. N. Griſchow. p. 431.

Magni momenti ſemper viſae ſunt Aſtronomis, Eclipſium tam lunarium, quam ſolarium obſeruationes, atque pro emendanda ſatellitis noſtri Theoria, eruendisque tabularum hactenus conſtructarum erroribus, vtiliſſimae. Praetulerunt autem, pro obtinendo hoc ſcopo, non ſine ſat praegnantibus rationibus, ſolares Eclipſes iis, quas Luna patitur; priorum enim potiora momenta longe exactius, quam poſteriorum, obſeruare in poteſtate eſt.

Praecipuum quod Clar. Auctor exigere ſibi propoſuit negotium, in hac diſſertione eo redit, vt ex Eclipſibus ſolaribus, d. 25. Iulii A. 1748. et d. 8. Ian. ſt. n. 1750. ſolerter a ſe obſeruatis, errores, quibus tabulae Halleianae obnoxiae ſunt, disquirat. Generatim itaque primum, ad quae praecipue attendendum ſit in inſtituendis Eclipſium ſolarium obſeruationibus, vt emendandis tabulis aptae euadant, exponit atque commonſtrat, accuratam initii et finis Eclipſeos obſeruationem, vna cum exacta diametri Lunae apparentis determinatione, vtramque hic facere paginam. Deliquia autem Solis minora, aut ea, vbi minor pars Solis a Luna obtegitur, maioribus pro hoc ſcopo praeferenda eſſe, demonſtrat, cum errores in diametro Lunae, aut Eclipſeos duratione forte commiſſi, in longitudine et latitudine Lunae, ex obſeruatione per computum deducta, minores tum procreet errores.

Ipſum

Ipſum deinde ſibi propoſitum negotium exſequitur, deducendo ex obſeruationibus longitudines atque latitudines Lunae, quas in vtriusque Eclipſeos initio ac fine, vere habuit, hasque cum longitudinibus atque latitudinibus, ad eadem momenta, ex tabulis Halleianis deductis, confert. Deprehendit ſic, omnino ſenſibiliter a coelo aberrare ſaepius dictas tabulas, falſaque ſuppeditare Lunae loca.

Difficile eſt, niſi plures obſeruationes aliae, debita accuratione inſtitutae, in auxilium vocentur, extricare, quae praecipue tabularum Halleii elementa peccent, erroresque iſtos progignant. Solerti interim inſtituta diſquiſitione, eo pertingit tandem auctor, vt oſtendat, pro reducendis tabulis Halleianis, ad exactum cum coelo conſenſum, opus eſſe, vt Parallaxis Lunae horiz. Halleiana aliquantum augeatur, locus vero nodi Lunae medius ex iisdem his tabulis deductus, aliquot minutis promoueatur, quantae vero elementis Halleianis praeciſe adhibendae ſint correctiones, hactenus cum certitudine determinare non audet.

## III.

## Obſeruationes Aſtronomicae, ſub finem anni Lipſiae 1751. habitae. a. Godofr. Heinſio p. 467.

Obſeruatae autem ſunt Occultatio Iouis partialis a Luna, quae d. 29 Decembris ſt. n. anni ſupradicti accidit, et Eclipſes Satellitum Iouis d. 27 Decembris ſt. n de quibus in compendio quaedam dicere, ſuperuacaneum foret.

IV.

## IV.

# Obſeruationes Aſtronomicae Pekini habitae a RR. PP. Gallis S. I. p. 473.

Hac potiſſimum debentur R. P. Antonii Gaubil, Academiae noſtrae Socii, induſtriae ac humanitati, quibus continentur

1.) Mercurius in Sole viſus 1753. d. 6. Maii.

2.) Eclipſis Lunae 1754. d. 1. Octobris.

3.) Obſeruationes Lyrae 1754. M. Nouembri.

4.) Obſeruationes Capellae 1755. M. Februario.

5.) Stellae Polaris 1755. M. Decembri.

6.) Antiquae Polaris Sinicae 1756.

7.) Obſeruationes variae 1756.

8.) Tranſitus Mercurii per Solem 1756. d. 7. Nov.

9.) Apparentes altitudines ſtellarum aliquot 1756.

10.) Satellitum Iouis obſeruationes 1756.

Quo rariores ſunt ex tam longinquis terrae regionibus allatae obſeruationes, eo gratiores has propoſitas Aſtronomiae cultoribus fore putamus; potiſſimum, cum eaedem quoque tam celebritate nominis R. Gaubilii, quam ſua ipſarummet accuratione, ſe commendent.

Denique

Denique hoc monemus, quod, promiſſi, in Summario Tomi IV. horum Comm. p. 49. facti, memores, iconem Muris aquatici Moſchum redolentis fieri curauimus; quae, quamquam non ad viuum animal, vt nobis mens erat, ſed ad exuuias infarctas, Orenburgo ad nos miſſas, expreſſa ſit: ſatis tamen recte ſe habet, et, quod ſpondere audemus, figuram animalis externam, magnitudinemque eius naturalem, exacte refert. Haec aeri inciſa reliquis iconibus atque figuris huius Tomi Tab. XIII. ſubiungitur, iconi Sarrazinianae in Comment. Acad. Scient. Pariſ. 1725. exhibitae, quae omnino has ſecundas curas poſtulare videbatur, ſubſtituenda.

Monendus quoque eſt lector, imo bibliopegus, ne ſub initium Claſſis Aſtronomicae, dum *cuſtodem*, vt aiunt typothetae, INVE- obſeruabit, et ſubſequitur SOLVTIO, aliquid deeſſe putet. Primum conſtitutum erat, diſſertationem Cl. *Griſchouii*, quae inſcribitur: Inueſtigatio Parallaxeos Lunae, eo loco exhibere, quam deinde rogatu Auctoris ſequenti Tomo reſeruauimus. Ordo in numeris paginarum nullam iacturam factam eſſe confirmat.

# MATHEMATICA.

# DEMONSTRATIO
# THEOREMATIS FERMATIANI
## OMNEM NVMERVM PRIMVM FORMAE $4n+1$ ESSE SVMMAM DVORVM QVADRATORVM.

AVCTORE *LEONARDO EVLERO*

§. 1.

Cum nuper eos eſſem contemplatus numeros, qui ex additione duorum quadratorum oriuntur, plures demonſtraui proprietates, quibus tales numeri ſunt praediti: neque tamen meas meditationes eo vsque perducere licuit, vt huius theorematis, quod Fermatius olim Geometris demonſtrandum propoſuit, veritatem ſolide oſtendere potuiſſem. Tentamen tamen demonſtrationis tum expoſui, vnde certitudo huius theorematis multo luculentius elucet, etiamſi criteriis rigidae demonſtrationis deſtituatur: neque dubitaui, quin iisdem veſtigiis inſiſtendo tandem demonſtratio deſiderata facilius obtineri poſſit; quod quidem ex eo tempore mihi ipſi vſu venit, ita, vt tentamen illud, ſi alia quaedam leuis conſideratio accedat, in rigidam demonſtrationem abeat. Nihil quidem noui in hac re me praeſtitiſſe gloriari poſſum, cum ipſe Fermatius iam demonſtrationem huius theorematis elicuiſſe ſe profiteatur; verum, quod eam nusquam publici iuris fecit, eius iactura perinde ac plurimorum aliorum egregiorum huius viri inuentorum efficit, vt, quae nunc demum de his deperditis rebus quaſi recuperamus, ea non immerito pro nouis inuentis habeantur. Cum enim nemo vnquam

tam feliciter in arcana numerorum penetrauerit, quam Fermatius, omnis opera in hac ſcientia vlterius excolenda fruſtra impendi videtur, niſi ante, quae ab hoc excellenti Viro iam fuerunt inueſtigata, quaſi de nouo in lucem protrahantur. Etſi enim poſt eum plures Viri docti in hoc ſtudiorum genere vires ſuas exercuerunt, nihil tamen plerumque ſunt conſecuti, quod cum ingenio huius Viri comparari poſſet.

§. 2. Vt autem demonſtrationem theorematis, quod hic conſidero, inſtituam, duas propoſitiones in ſubſidium vocari oportet, quarum demonſtrationem iam alibi dedi. Altera eſt, quod omnes numeri, qui ſunt diuiſores ſummae duorum quadratorum inter ſe primorum, ipſi ſint ſummae duorum quadratorum; ſic ſi $a$ et $b$ ſint numeri inter ſe primi, atque numeri ex iis formati $aa + bb$ diuiſor ſit $d$, erit quoque $d$ ſumma duorum quadratorum: huius theorematis demonſtrationem dedi in ſcripto ante memorato, quo numeros, qui ſunt duorum quadratorum ſummae, ſum contemplatus. Altera propoſitio, qua demonſtratio ſequens indiget, ita ſe habet: ſi $p$ ſit numerus primus, atque $a$ et $b$ numeri quicunque per $p$ non diuiſibiles, erit ſemper $a^{p-1} - b^{p-1}$ per numerum primum $p$ diuiſibilis: demonſtrationem huius rei iam dudum in Comment. Acad. Petrop. Tom. VIII dedi.

§. 3. Quodſi iam $4n + 1$ ſit numerus primus, per eum omnes numeri in hac forma $a^{4n} - b^{4n}$ contenti erunt diuiſibiles, ſiquidem neuter numerorum $a$ et $b$ ſeorſim per $4n + 1$ fuerit diuiſibilis. Quare ſi $a$ et $b$ ſint numeri minores, quam $4n + 1$, (cyphra

tamen

tamen excepta), numerus inde formatus $a^{4n} - b^{4n}$ ſine vlla limitatione per numerum primum propoſitum $4n + 1$ erit diuiſibilis. Cum autem $a^{4n} + b^{4n}$ ſit productum horum factorum $a^{2n} + b^{2n}$ et $a^{2n} - b^{2n}$, neceſſe eſt, vt alteruter horum factorum ſit per $4n + 1$ diuiſibilis; fieri enim nequit, vt vel neuter, vel vterque ſimul diuiſorem habeat $4n + 1$. Quodſi iam demonſtrari poſſet, dari caſus, quibus forma $a^{2n} + b^{2n}$ ſit diuiſibilis per $4n + 1$, quoniam $a^{2n} + b^{2n}$, ob exponentem $2n$ parem, eſt ſumma duorum quadratorum, quorum neutrum ſeorſim per $4n + 1$ diuiſibile exiſtit, inde ſequeretur, hunc numerum $4n + 1$ eſſe ſummam duorum quadratorum.

§. 4. Verum ſumma $a^{2n} + b^{2n}$ toties erit per $4n + 1$ diuiſibilis, quoties differentia $a^{2n} - b^{2n}$ per eundem numerum non eſt diuiſibilis. Quare qui negauerit, numerum primum $4n + 1$ eſſe ſummam duorum quadratorum, is negare cogitur, vllum numerum huius formae $a^{2n} + b^{2n}$ per $4n + 1$ eſſe diuiſibilem: eundem propterea affirmare oportet, omnes numeros in hac forma $a^{2n} - b^{2n}$ contentos per $4n + 1$ eſſe diuiſibiles; ſiquidem neque $a$, neque $b$ per $4n + 1$ ſit diuiſibile. Quamobrem mihi hic demonſtrandum eſt, non omnes numeros in forma $a^{2n} - b^{2n}$ contentos per $4n + 1$ eſſe diuiſibiles; hoc enim ſi praeſtitero, certum erit, dari caſus, ſeu numeros pro $a$ et $b$ ſubſtituendos, quibus forma $a^{2n} - b^{2n}$ non ſit per $4n + 1$ diuiſibilis; illis ergo caſibus altera forma $a^{2n} + b^{2n}$ neceſſario per $4n + 1$ erit diuiſibilis: vnde cum $a^{2n}$ et $b^{2n}$ ſint numeri quadrati, conficietur id, quod proponitur,

A 3 ſcilicet

ſcilicet numerum $4n+1$ eſſe ſummam duorum quadratorum.

§. 5. Vt igitur demonſtrem, non omnes numeros in hac forma $a^{2n}-b^{2n}$ contentos, ſeu non omnes differentias inter binas poteſtates dignitatis $2n$ eſſe per $4n+1$ diuiſibiles, conſiderabo ſeriem harum poteſtatum ab vnitate vsque ad eam, quae a radice $4n$ formatur.

$$1,\ 2^{2n},\ 3^{2n},\ 4^{2n},\ 5^{2n},\ 6^{2n}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (4n)^{2n}$$

ac iam dico, non omnes differentias inter binos terminos huius ſeriei eſſe per $4n+1$ diuiſibiles. Si enim ſingulae differentiae primae

$$2^{2n}-1;\ 3^{2n}-2^{2n};\ 4^{2n}-3^{2n};\ 5^{2n}-4^{2n};\ ..\ (4n)^{2n}-(4n-1)^{2n}$$

per $4n+1$ eſſent diuiſibiles, etiam differentiae huius progreſſionis, quae ſunt differentiae ſecundae illius ſeriei per $4n+1$ eſſent diuiſibiles: atque ob eandem rationem differentiae tertiae, quartae, quintae etc. omnes forent per $4n+1$ diuiſibiles; ac denique etiam differentiae ordinis $2n$, quae ſunt, vt conſtat, omnes inter ſe aequales. Differentiae autem ordinis $2n$ ſunt $= 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 2n$, quae ergo per numerum primum $4n+1$ non ſunt diuiſibiles, ex quo viciſſim ſequitur, ne omnes quidem differentias primas per $4n+1$ eſſe diuiſibiles.

§. 6. Quo vis huius demonſtrationis melius perſpiciatur, notandum eſt, differentiam ordinis $2n$ produci ex $2n+1$ terminis ſeriei propoſitae, qui ſi ab initio capiantur, omnes ita ſunt comparati, vt binorum quorumuis differentiae per $4n+1$ diuiſibiles eſſe debeant, ſi theorematis veritas negetur. Sin autem

plures

plures termini ad hanc differentiam vltimam conſtituendam concurrerent, iique vltra terminum $(4n)^{2n}$ progrederentur, quoniam differentiae a termino ſequente $(4n+1)^{2n}$ ortae ad enunciata theorematis non pertinent, demonſtratio nullam vim retineret. Hinc autem, quod differentia vltima, quam ſumus contemplati, tantum ab $2n+1$ terminis pendet, concluſio, quam inde deduximus, omnino eſt legitima; indeque ſequitur, dari differentias primas, veluti $a^{2n}-(a-1)^{2n}$, quae non ſint per $4n+1$ diuiſibiles, atque ita quidem, vt $a$ non ſit maior, quam $2n+1$. Hinc autem porro recte infertur, ſummam $a^{2n}+(a-1)^{2n}$, ideoque ſummam duorum quadratorum per $4n+1$ neceſſario eſſe diuiſibilem: ideoque numerum primum $4n+1$ ſummam eſſe duorum quadratorum.

§. 7. Quoniam differentia ordinis $2n$ ab $2n+1$ terminis feriei poteſtatum pendet, totidem tantum ab initio captos conſideremus

$$1;\ 2^{2n};\ 3^{2n};\ 4^{2n};\ 5^{2n};\ 6^{2n}\ \ldots\ (2n)^{2n};\ (2n+1)^{2n}$$

vnde differentiae primae erunt: $2^{2n}-1$; $3^{2n}-2^{2n}$; $4^{2n}-3^{2n}$; $5^{2n}-4^{2n}$; ...... $(2n+1)^{2n}-(2n)^{2n}$ cuius progreſſionis terminorum numerus eſt $=2n$. Ex demonſtratione itaque praecedente patet, non omnes terminos huius progreſſionis differentiarum eſſe per numerum primum $4n+1$ diuiſibiles; neque tamen hinc intelligimus, quot et quinam ſint illi termini, per $4n+1$ non diuiſibiles. Ad demonſtrationem enim ſufficit, ſi vel vnicus terminus, quisquis ille ſit, per $4n+1$ non ſit diuiſibilis. Quodſi autem caſus ſpeciales euoluamus, quibus $4n+1$ eſt numerus primus,

primus, ex differentiis iſtis, quarum numerus eſt $= 2n$, reperiemus, ſemper ſemiſſem eſſe per $4n+1$ diuiſibilem, alterum vero ſemiſſem non diuiſibilem: quae obſeruatio etſi ad vim demonſtrationis non ſpectat, tamen ad eam illuſtrandam non parum confert, quare aliquot caſus ſpeciales ad examen reuocaſſe iuuabit.

§. 8. Minimus numerus primus formae $4n+1$ eſt $= 5$, qui oritur, ſi $n = 1$; vnde duae habebuntur differentiae $2^2-1$ et $3^2-2^2$, quarum prior non eſt diuiſibilis per 5, altera vero eſt diuiſibilis. Pro reliquis caſibus vtamur ſigno $d$ ad eas differentias indicandas, quae ſunt diuiſibiles, at ſigno o eas notemus, quae non ſunt diuiſibiles, quae ſigna differentiis pro quouis caſu, ſubſcribamus

| $4n+1$ | Differentiae | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | $2^6-1$; | $3^6-2^6$; | $4^6-3^6$; | $5^6-4^6$; | $6^6-5^6$; | $7^6-6^6$: | | |
| | o | o | $d$ | o | $d$ | $d$ | | |
| 17 | $2^8-1$; | $3^8-2^8$; | $4^8-3^8$; | $5^8-4^8$; | $6^8-5^8$; | $7^8-6^8$; | $8^8-7^8$; | $9^8-8^8$ |
| | $d$ | o | o | o | $d$ | $d$ | o | $d$ |
| 29 | $2^{14}-1$; | $3^{14}-2^{14}$; | $4^{14}-3^{14}$; | $5^{14}-4^{14}$; | $6^{14}-5^{14}$; | $7^{14}-6^{14}$; | $8^{14}-7^{14}$; | $9^{14}-8^{14}$; |
| | o | $d$ | o | $d$ | $d$ | $d$ | o | o |
| | $10^{14}-9^{14}$; | $11^{14}-10^{14}$; | $12^{14}-11^{14}$; | $13^{14}-12^{14}$; | $14^{14}-13^{14}$; | $15^{14}-14^{14}$ | | |
| | o | $d$ | $d$ | o | o | $d$ | | |

Hinc patet, terminos diuiſibiles et non diuiſibiles nulla certa lege contineri, etiamſi vtrique ſint multitudine pares: tamen per ſe eſt perſpicuum, vltimum terminum $(2n+1)^{2n} - 2n^{2n}$ ſemper per $4n+1$ eſſe diuiſibilem, quia factorem habet $(2n+1)^2 - 4nn = 4n+1$; at de reliquis nihil certi ſtatui poteſt.

§. 9.

§. 9. Porro quoque ad vim demonſtrationis penitius perſpiciendam notari oportet, demonſtrationem tum ſolum locum habere, ſi numerus $4n+1$ ſit primus; prorſus vti natura theorematis poſtulat. Nam ſi $4n+1$ non eſſet numerus primus, neque de eo affirmari poſſet, quod ſit ſumma duorum quadratorum, neque forma $a^{4n}-b^{4n}$ per eum eſſet neceſſario diuiſibilis. Quia etiam vltima concluſio foret falſa, qua pronunciauimus, differentias illas ordinis $2n$, quae ſunt $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots 2n$, non eſſe per $4n+1$ diuiſibiles. Si enim $4n+1$ non eſſet numerus primus, ſed factores haberet, qui eſſent minores, quam $2n$, tum vtique productum $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots 2n$ hos factores contineret, foretque idcirco per $4n+1$ diuiſibile. At ſi $4n+1$ eſt numerus primus, tum demum affirmare licet, productum $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots 2n$ plane non eſſe per $4n+1$ diuiſibile: quia hoc productum per nullos alios numeros diuidi poteſt, niſi qui tanquam factores in illud ingrediuntur.

§. 10. Cum denique demonſtratio tradita hoc nitatur fundamento, quod ſeriei poteſtatum $1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}$, etc. differentiae ordinis $2n$ ſint conſtantes, omnesque $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots 2n$, hoc vberius explicandum videtur, etſi paſſim in libris analyticorum ſolide expoſitum reperitur. Primum igitur notandum eſt, ſi ſeriei cuiuscunque terminus generalis, ſeu is qui exponenti indefinito $x$ reſpondet, ſit $= Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} +$ etc. hanc ſeriem ad gradum $m$ referri, quia $m$ eſt exponens maximae poteſtatis ipſius $x$. Deinde ſi hic terminus generalis a ſequente $A(x+1)^m + B(x+1)^{m-1} + C(x+1)^{m-2} +$ etc.

etc. ſubtrahatur, prodibit terminus generalis ſeriei differentiarum, in quo exponens ſummae poteſtatis ipſius $x$ erit $= m - 1$, ideoque ſeries differentiarum ad gradum inferiorem $m - 1$ pertinebit. Pari modo ex termino generali ſeriei differentiarum primarum colligetur terminus generalis ſeriei differentiarum ſecundarum, qui igitur denuo ad gradum depreſſiorem $m - 2$ pertinebit.

§. 11. Ita ſi ſeries propoſita ad gradum $m$ referatur, ſeries differentiarum primarum, ad gradum $m - 1$ referetur; ſeries porro differentiarum ſecundarum ad gradum $m - 2$; ſeries differentiarum tertiarum ad gradum $m - 3$; ſeries differentiarum quartarum ad gradum $m - 4$; et in genere ſeries differentiarum ordinis $n$ ad gradum $m - n$ pertinebit. Vnde ſeries differentiarum ordinis $m$ ad gradum $m - m = 0$ perueniet, eiusque ergo terminus generalis, quia ſumma ipſius $x$ poteſtas eſt $= x^0 = 1$, erit quantitas conſtans, ideoque omnes differentiae ordinis $m$ inter ſe erunt aequales. Hinc ſerierum primi gradus, quarum terminus generalis eſt $= Ax + B$, iam differentiae primae ſunt inter ſe aequales: ſerierum autem ſecundi gradus, quae hoc termino generali $Ax^2 + Bx + C$ continentur, differentiae ſecundae ſunt aequales, et ita porro.

§. 12. Quodſi ergo ſeriem quamcunque poteſtatum conſideremus

$$1, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m, 6^m, 7^m, 8^m, \text{etc.}$$

cuius terminus generalis eſt $= x^m$, ſeu is, qui indici $x$ reſpondet, ſeries differentiarum ordinis $m$ ex terminis inter ſe aequalibus conſtabit. At ſeriei differentiarum primarum terminus generalis erit $= (x+1)^m - x^m$; qui a

ſequente

ſequente $(x+2)^m-(x+1)^m$ ſubtractus dabit terminum generalem ſeriei differentiarum ſecundarum, qui erit $=(x+2)^m-2(x+1)^m+x^m$. Hinc porro ſeriei differentiarum tertiarum erit terminus generalis $=(x+3)^m-3(x+2)^m+3(x+1)^m-x^m$; ac tandem ſeriei differentiarum ordinis $m$ concluditur terminus generalis $=(x+m)^m-m(x+m-1)^m+\frac{m(m-1)}{1.2}(x+m-2)^m-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(x+m-3)^m+$ etc. qui cum ſit quantitas conſtans, idem erit quicunque numerus pro $x$ ſubſtituatur, erit ergo

vel $=m^m-m(m-1)^m+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m-3)^m$ + etc.

vel $=(m+1)^m-m.m^m+\frac{m(m-1)}{1.2}(m-1)^m-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m-2)^m$ + etc.

vbi in forma priori poſuimus $x=0$, in poſteriori $x=1$.

§. 13. Euoluamus iam caſus hujus ſeriei ſpeciales et a poteſtatibus minimis ad altiores aſcendamus ac poſito primo $m=1$, ſeriei $1, 2, 3, 4, 5, 6$, etc. terminus generalis differentiarum primarum erit $=1^1-1.0^1=1$; vel $=2^1-1.1^1=1$. Si $m=2$, ſeriei $1; 2^2; 3^2; 4^2; 5^2$; etc. differentiae ſecundae ſunt vel $2^2-2.1^2$, vel $3^2-2.2^2+1.1^2$; at eſt $2^2-2.1^2=2(2^1-1.1^1)$, vnde hae differentiae ſecundae ſunt $=2.1$. Sit $m=3$, et ſeriei $1, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3$, etc. differentiae tertiae erunt vel $=3^3-3.2^3+3.1^3$, vel $4^3-3.3^3+3.2^3-1.1^3$; at $3^3-3.2^3+3.1^3=3(3^2-2.2^2+1.1^2)=3.2.1$, quia ex caſu praecedente eſt $3^2-2.2^2+1.1^2=2.1$. Simili modo ſi $m=4$ ſeriei $1, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4$,

 etc.

etc. differentiae quartae erunt vel $4^4 - 4 \cdot 3^4 + 6 \cdot 2^4 - 4 \cdot 1^4$; vel $5^4 - 4 \cdot 4^4 + 6 \cdot 3^4 - 4 \cdot 2^4 + 1 \cdot 1^4$. At eſt $4^4 - 4 \cdot 3^4 + 6 \cdot 2^4 - 4 \cdot 1^4 = 4\,(4^3 - 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 2^3 - 1 \cdot 1^3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

§. 14. Quo hic progreſſus melius perſpiciatur, ſint ſeriei $1, 2^m, 3^m, 4^m, 5^m$ etc. differentiae ordinis $m = P$; ſeriei $1; 2^{m+1}; 3^{m+1}; 4^{m+1}; 5^{m+1}$ etc. differentiae ordinis $m + 1 = Q$. erit $P = (m+1)^m - m \cdot m^m + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(m-1)^m - \frac{m(m-2)(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(m-2)^m +$ etc. $Q = (m+1)^{m+1} - (m+1)\, m^{m+1} + \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2}(m-1)^{m+1} - \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(m-1)^{m+1} +$ etc. Vbi P ex forma poſteriori, at Q ex forma priori expreſſimus. Hic primo patet, in vtraque expreſſione parem eſſe terminorum numerum, et ſingulos terminos expreſſionis P eſſe ad ſingulos terminos expreſſionis Q, vti $1$ ad $m + 1$. Namque eſt

$(m+1)^m : (m+1)^{m+1} = 1 : m+1$;

$m \cdot m^m : (m+1)\, m^{m+1} = 1 : m+1$;

$\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}(m-1)^m : \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2}(m-1)^{m+1} = 1 : m+1$;

$\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(m-2)^m : \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(m-2)^{m+1} = 1 : m+1$;

etc.

Hanc ob rem erit $P : Q = 1 : m+1$, ideoque $Q = (m+1)\, P$.

§. 15. Hinc ergo patet fore:

| ſeriei | Differentias |
|---|---|
| $1; 2; 3; 4; 5;$ etc. | primas $= 1$ |
| $1; 2^2; 3^2; 4^2; 5^2;$ etc. | ſecundas $= 1 \cdot 2$ |

$1; 2^3;$

$1;\ 2^3;\ 3^3;\ 4^3;\ 5^3;$ etc. tertias $= 1.\ 2.\ 3$

$1;\ 2^4;\ 3^4;\ 4^4;\ 5^4;$ etc. quartas $= 1.\ 2.\ 3.\ 4$

$1;\ 2^m;\ 3^m;\ 4^m;\ 5^m;$ etc. ordinis $m = 1.\ 2.\ 3\ \ldots\ m,$

ergo

$1;\ 2^{2n};\ 3^{2n};\ 4^{2n};\ 5^{2n};$ etc. ordinis $2n = 1.\ 2.\ 3 \ldots 2n.$

Atque ita quoque demonſtrauimus, ſeriei poteſtatum $1;\ 2^{2n};\ 3^{2n};\ 4^{2n};\ 5^{2n}$ etc. differentias ordinis $2n$ non ſolum eſſe conſtantes, ſed etiam aequari producto $1.\ 2.\ 3\ \ldots\ 2n,$ vti in demonſtratione theorematis propoſiti aſſumſimus.

## THEOREMA 1.

1. Ex ſerie quadratorum 1, 4, 9, 16, 25, etc. nulli numeri per numerum primum $p$ ſunt diuiſibiles, niſi quorum radices ſunt per eundem numerum $p$ diuiſibiles.

## DEMONSTRATIO.

Si enim quiſpiam numerus quadratus $aa$ fuerit per numerum primum $p$ diuiſibilis, quia ex factoribus $a$ et $a$ conſtat, neceſſe eſt, vt alteruter factor per $p$ ſit diuiſibilis, quare numerus quadratus $aa$ per numerum primum $p$ diuiſibilis eſſe nequit, niſi eius radix $a$ ſit diuiſibilis per $p$.

## COROLL. 1.

2. Numeri ergo quadrati per numerum primum $p$ diuiſibiles naſcuntur ex radicibus $p,\ 2p,\ 3p,\ 4p$ etc. ſuntque ergo $pp,\ 4pp,\ 9pp,\ 16pp,$ etc. et reliqui numeri quadrati omnes per numerum primum $p$ non erunt diuiſibiles.

DEMOÑSTRATIO

## COROLL. 2.

3. *Si ergo* numeri quadrati, quorum radices in hac progreſſione arithmetica $p$, $2p$, $3p$, $4p$, etc. non continentur, per numerum primum $p$ diuidantur, in diuiſione ſemper reſiduum remanebit, quod erit minus, quam numerus $p$.

## SCHOLION.

4. Cuiusmodi ſint haec reſidua, quae ex diuiſione ſingulorum quadratorum per numerum primum quemcunque $p$ naſcuntur, in hac diſſertatione diligentius inueſtigare conſtitui. Plurima enim hic inſignia phaenomena occurrent, quorum conſideratione natura numerorum non mediocriter illuſtratur. Tam eximia autem in doctrina numerorum adhuc latent myſteria, in quibus euoluendis opera non fruſtra impendi videtur.

## THEOREMA. 2.

5. *Si* ſeries quadratorum in infinitum continuata in membra diſpeſcatur, quorum ſingula ex $p$ terminis conſtent, hoc modo

$$1, 4, \ldots pp \,|\, (p+1)^2 \ldots 4pp \,|\, (2p+1)^2 \ldots 9pp \,|\, (3p+1)^2 \ldots 16pp \,|\, \text{etc.}$$

tum ſi vniuscuiusque membri termini ſinguli per numerum primum $p$ diuidantur, eadem reſidua eodemque ordine recurrent.

## DEMONSTRATIO.

Singulorum enim membrorum termini primi $1$, $(p+1)^2$, $(2p+1)^2$, $(3p+1)^2$; etc. ſi per $p$ diuidantur,

dantur, idem dabunt reſiduum $= 1$. Similique modo termini ſecundi $4$, $(p+2)^2$, $(2p+2)^2$, $(3p+2)^2$ etc. per $p$ diuiſi aequalia producent reſidua $= 4$, ſi quidem ſit $p > 4$. Eodemque modo patet, terminos tertios aequalia praebere reſidua, itemque quartos et quintos etc. Atque in genere, ſi primi membri terminus quotuscunque ſit $nn$, reliquorum membrorum termini analogi erunt $(p+n)^2$; $(2p+n)^2$, $(3p+n)^2$ etc. qui omnes per $p$ diuiſi idem relinquunt reſiduum, quod terminus $nn$. In ſingulis ergo membris eadem redeunt reſidua eodemque ordine.

## COROLL. 1.

6. Si igitur nouerimus reſidua, quae ex terminis primi membri naſcuntur, ſimul habebimus reſidua, quae ex diuiſione omnium reliquorum membrorum per numerum $p$ facta oriuntur.

## COROLL. 2.

7. Quia poſtremus cuiusque membri terminus per numerum $p$ diuiſibilis exiſtit, reſiduum erit $= 0$; quemadmodum primi cuiusque membri termini reſiduum eſt $= 1$. Secundorum vero terminorum cuiusque membri reſiduum erit $= 4$, et tertiorum $= 9$, quartorum $= 16$ etc. ſi quidem ſit $p > 4$, et $p > 9$, et $p > 16$ etc.

## COROLL. 3.

8. Quamdiu enim numeri quadrati 1, 4, 9, 16, etc. minores ſunt, quam numerus $p$, illi ipſi reſidua conſti-

tuent.

tuent. Ex ſequentibus vero quadratis numero $p$ maioribus reſidua emergent alia ipſo numero $p$ minora.

## SCHOLION.

9. Ex diuiſionis natura conſtat, reſidua ſemper eſſe minora diuiſore $p$, ac ſi forte per inaduertentiam reſiduum relinquatur maius, quam diuiſor $p$, id ſubtrahendo $p$, quoties fieri poteſt, ad numerum ipſo $p$ minorem reducetur. Sic reſiduum $p + a$, et in genere $np + a$, quod forte ex diuiſione per $p$ prodierit, aequivalebit reſiduo $a$; atque cum de reſiduis, quae ex diuiſione numerorum per $p$ naſcuntur, agitur, omnia haec reſidua $a$, $p + a$, $2p + a$, et $np + a$ pro aequivalentibus haberi poſſunt; omnia ſcilicet redeunt ad minimum $a$, quae reductio cum ſit in promtu, eam tuto negligere poterimus, vel tanquam iam factam aſſumere. Ita ſi numeri quadrati 1, 4, 9, 16 25 etc. per numerum $p$ diuidantur, nihil obſtabit, quominus dicamus reſidua inde oriunda eſſe 1, 4, 9, 16, 25 etc. etiamſi hic numeri occurrant ipſo diuiſore $p$ maiores. De cetero notandum eſt, hoc theorema vim ſuam retinere, ſiue diuiſor $p$ ſit numerus primus, ſiue ſecus.

## COROLL. 4.

10. Cum terminus vltimus $pp$ primi membri nullum praebeat reſiduum, omnia reſidua, quae quidem ex tota ſerie quadratorum oriri poſſunt, naſcentur ex his terminis $1, 4, 9, 16 \ldots (p-1)^2$; quorum numerus eſt $= p - 1$.

COROLL.

## COROLL. 5.

11. Plura ergo diuerſa reſidua oriri nequeunt, quam $p-1$: quod quidem per ſe eſt manifeſtum. Cum enim omnia reſidua ſint ipſo diuiſore $p$ minora, omnium autem numerorum ipſo $p$ minorum numerus ſit $=p-1$, etiam numerus reſiduorum diuerſorum numerus maior eſſe nequit.

## THEOREMA. 3.

12. Si omnes termini ſeriei quadratorum 1, 4, 9, 16, etc. per numerum quemcunque $p$ diuidantur, ac reſidua notentur, inter haec reſidua non omnes numeri minores, quam $p$, occurrent.

## DEMONSTRATIO.

Omnia enim reſidua, quae quidem ex diuiſione omnium quadratorum per numerum $p$ oriuntur, ex his terminis reſultant:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16 \ldots (p-4)^2, (p-3)^2, (p-2)^2, (p-1)^2,$$

quorum terminorum numerus eſt $=p-1$: ideoque inde totidem reſidua proueniunt. Verum haec reſidua non omnia inter ſe ſunt diuerſa: nam terminus vltimus $(p-1)^2 = pp-2p+1$ per $p$ diuiſus reſiduum relinquit $=1$. idem ſcilicet, quod primus terminus 1. Simili modo terminus penultimus $(p-2)^2 = pp-4p+4$ idem praebet reſiduum, quod terminus ſecundus 4; et terminus antepenultimus $(p-3)^2$ idem dat reſiduum, quod terminus tertius 9. Atque

in genere terminus ordine $n$, qui eſt $nn$, idem dat reſiduum, quod terminus ordine $p-n$, qui eſt $(p-n)^2$. Cum igitur omnia reſidua, quae ex his terminis $1, 4, 9 \ldots\ldots (p-1)^2$ oriuntur, et quorum numerus eſt $= p-1$, non ſint inter ſe diuerſa, in iis non omnes numeri ipſo $p$ minores, quorum numerus eſt $= p-1$, occurrere poſſunt.

## COROLL. 1.

13. Cum igitur bina reſidua ſemper ſint aequaſia, numerus diuerſorum reſiduorum ad ſemiſſem $\frac{p-1}{2}$ redigitur, ſiquidem ſit $p-1$ numerus par; at ſi $p-1$ ſit numerus impar, ſeu $p$ par, tum numerus diuerſorum reſiduorum erit $= \frac{p}{2}$: hoc enim caſu dabitur reſiduum medium, quod ſui aequale non habet.

## COROLL. 2.

14. Cum igitur omnium numerorum ipſo $p$ minorum numerus ſit $= p-1$, patet ſemiſſem horum numerorum in reſiduis locum habere: dabunturque ergo numeri, qui ex diuiſione numerorum quadratorum per numerum $p$ nunquam relinquentur, ſolo excepto caſu, quo $p = 2$; quia $p-1 = \frac{p}{2} = 1$.

## COROLL. 3.

15. Quicunque ergo praeterea ſit numerus $p$, per quem numeri quadrati diuidantur, ex numeris ipſo $p$ minoribus, ſemper erunt ad minimum $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$ numeri, qui inter reſidua non reperiuntur. Prior caſus valet, ſi $p$ eſt numerus impar, poſterior ſi par.

COROLL.

## COROLL. 4.

16. Hinc igitur numeri ipſo diuiſore $p$ minores, quorum multitudo eſt $= p - 1$, ſponte ſe in duas claſſes diſcriminant, quarum altera continet numeros in reſiduis locum habentes; altera vero eos, qui in claſſe reſiduorum non occurrunt. Hos numeros non-reſidua hic appellabo.

## SCHOLION.

17. Quo haec clarius percipiantur, iuuabit nonnulla exempla, in quibus reſidua et non-reſidua diſtinguuntur, inſpexiſſe.

| Sit | $p = 3$ | $p = 4$ | $p = 5$ | $p = 6$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1, 4 | 1, 4, 9 | 1, 4, 9, 16 | 1, 4, 9, 10, 25 |
| reſidua | 1, 1 | 1, 0, 1 | 1, 4, 4, 1 | 1, 4, 3, 4, 1 |
| non-reſid. | 2 | 2, 3 | 2, 3 | 2, 5 |

| Sit | $p = 7$ | $p = 8$ |
|---|---|---|
| | 1, 4, 9, 16, 25, 36 | 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 |
| Reſidua | 1, 4, 2, 2, 4, 1 | 1, 4, 1, 0, 1, 4, 1 |
| non-reſidua.. | 3, 5, 6 | 2, 3, 5, 6, 7 |

| Sit - - - | $p = 9$ | $p = 10$ |
|---|---|---|
| | 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, | 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 |
| Reſidua | 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1 | 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 |
| non-reſidua | 2, 3, 5, 6, 8 | 2, 3, 7, 8 |

| Sit - - - | $p = 11$ |
|---|---|
| | 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 |
| Reſidua | 1, 4, 9, 5, 3, 3, 5, 9, 4, 1 |
| non-reſidua | 2, 6, 7, 8, 10, |

| Sit - - - | $p = 12$ |
|---|---|
| | 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 |
| Reſidua | 1, 4, 9, 4, 1, 0, 1, 4, 9, 4, 1 |
| non-reſidua | 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11 |



Hinc

Hinc perſpicitur, numerum non-reſiduorum interdum eſſe, vel $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p-2}{2}$, prout $p$ fuerit numerus vel par, vel impar; interdum eſſe etiam maiorem, nunquam vero eſſe minorem, omnino vti demonſtratio theorematis poſtulat.

## THEOREMA. 4.

18. Vt omnia reſidua, quae ex diuiſione quadratorum per numerum quemcunque $p$ reſultare poſſunt, inueniantur, tantum opus eſt quadrata ab vnitate vsque ad terminum $(\frac{p-1}{2})^2$, vel $(\frac{p}{2})^2$, prout $p$ fuerit vel numerus impar, vel par, per $p$ diuidere.

## DEMONSTRATIO.

Ante iam demonſtrauimus, omnia reſidua prouenire ex diuiſione horum terminorum:

$$1, 4, 9, 16, \ldots\ldots (p-1)^2$$

deinde vero vidimus, ſeriem reſiduorum hinc natorum eſſe reciprocam, ſeu ordine retrogrado ſcriptam eandem manere. Quare reſidua omnia, quatenus inter ſe ſunt diuerſa, reperientur, ſi huius ſeriei termini tantum ad medietatem vsque capiantur, vnde ſi $p$ ſit numerus impar, ideoque $p-1$ par, omnes numeri, qui inter reſidua occurrunt, prodibunt ex his terminis:

$$1, 4, 9, 16 \ldots\ldots (\tfrac{p-1}{2})^2$$

Sin autem $p$ ſit numerus par, quia ſuperior progreſſio, habet terminum medium, qui retrogrediendo ſibi ipſe reſpondet, reſidua omnia ex his terminis orientur

$$1, 4, 9, 16, \ldots\ldots (\tfrac{p}{2})^2.$$

COROLL.

## COROLL. 1.

19. Si igitur $p$ ſit numerus impar, puta $p = 2q + 1$, omnia reſidua ex his tantum quadratis

$$1,\ 4,\ 9,\ 16\ \ldots\ldots\ qq$$

cognoſcentur. At ſi $p$ ſit numerus par, puta $p = 2q$, haec quadrata $1, 4, 9, 16 \ldots\ldots qq$ omnia producent reſidua.

## COROLL. 2.

20. Si haec reſidua omnia inter ſe fuerint inaequalia, cum eorum numerus ſit $= q$, caſu priori, quo $p = 2q + 1$, et $p - 1 = 2q$, numerus non-reſiduorum erit $= q$. Caſu poſteriori, quo $= p = 2q$, et $p - 1 = 2q - 1$, omnium non-reſiduorum numerus erit $= q - 1$.

## COROLL. 3.

21. Si $a$ ſit numerus quicunque non maior, quam $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$, atque reſiduum conſtet, quod ex diuiſione quadrati $aa$ per numerum $p$ reſultat, omnia quadrata in hac forma generali $(np \pm a)^2$ contenta idem praebebunt reſiduum. At numeri omnes omnino in forma $np \pm a$ includuntur, ita vt $a$ non excedat vel $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$.

## SCHOLION.

22. Quo indolem numerorum, qui ſunt reſidua, facilius explorare liceat, ſeriem reſiduorum repraeſentemus his litteris $1.\ \alpha.\ \beta\ \gamma.\ \delta.\ \varepsilon.\ \zeta.$ etc. pro diuiſore

$p$, ita vt numerus horum terminorum ſit vel $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$, prout $p$ ſit vel numerus impar, vel par. Primo igitur patet, in hac ſerie 1. $\alpha$. $\beta$. $\gamma$. $\delta$. $\varepsilon$. etc. occurrere ordine omnes numeros quadratos 1, 4, 9, 16 etc. qui quidem ſint ipſo numero $p$ minores: reliquos autem eſſe reſidua, quae in diuiſione maiorum quadratorum per eundem numerum $p$ relinquuntur. Reliquas proprietates reſiduorum in ſequentibus theorematis indagabimus.

## THEOREMA. 5.

23. Si in ſerie reſiduorum 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. occurrat numerus quicunque $r$, ibidem quoque reperientur omnes poteſtates ipſius $r^2$, $r^3$, $r^4$, $r^5$, etc, ſeu reſidua, quae ex harum poteſtatum diuiſione per numerum propoſitum $p$, naſcuntur.

## DEMONSTRATIO.

Emergat reſiduum $r$ ex quadrato $aa$, ita vt ſit $aa = mp + r$; et quadratum $a^4 = (mp + r)^2$ per $p$ diuiſum idem dabit reſiduum, quod oritur ex $rr$; atque ex quadrato $a^6 = (mp + r)^3$ idem oritur reſiduum, quod ex $r^3$; ſimilique modo reſidua quadratorum $a^8$, $a^{10}$, $a^{12}$, etc. conuenient cum reſiduis terminorum $r^4$, $r^5$, $r^6$, etc. At reſidua ex omnibus quadratis quantumuis magnis oriunda iam proueniunt ex quadratis minimis 1, 4, 9, 16 . . . . . . $(\frac{p-1}{2})^2$, vel $(\frac{p}{2})^2$, ideoque continentur in ſerie reſiduorum 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. Ergo ſi in hac ſerie occurrit numerus $r$, ibidem quoque occurrent termini $r^2$, $r^3$, $r^4$, $r^5$, etc. ſeu reſidua, quae ex eorum diuiſione per diuiſorem propoſitum $p$ relinquuntur.

COROLL.

## COROLL. 1.

24. Quae igitur poteſtatum $r^2$, $r^3$, $r^4$, $r^5$, etc. fuerint minores, quam $p$, eae ipſae in ſerie reſiduorum $1$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. reperientur. At altiores poteſtates ſua reſidua, quae diuiſae per $p$ relinquunt, ibidem introducent.

## COROLL. 2.

25. Si ſit $r = 1$, quia omnes eius poteſtates ſunt $= 1$, ex iis nonniſi vnicus terminus $1$ in ſerie reſiduorum $1$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. naſcitur. Neque ergo ex hoc caſu nouus terminus in ſerie reſiduorum cognoſcitur.

## COROLL. 3.

26. Quia in ſerie reſiduorum plures termini non occurrunt, quam vel $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$, plura quoque reſidua diuerſa ex poteſtatibus $r^2$, $r^3$, $r^4$, $r^5$, etc. etiamſi in infinitum continuentur, prodire non poſſunt. Vnde infinitae harum poteſtatum per $p$ diuiſae aequalia praebebunt reſidua.

## COROLL. 4.

27. Praebeant ergo hae poteſtates $r^m$ et $r^n$ idem reſiduum atque earum differentia $r^m - r^n$ per numerum $p$ erit diuiſibilis, ſeu $r^n(r^{m-n}-1)$. Vnde ſi factor $r^n$ ſit ad $p$ primus, quod euenit ſi reſiduum $r$ fuerit ad $p$ primum, alter factor $r^{m-n}-1$ per $p$ erit diuiſibilis, ideoque poteſtas $r^{m-n}$ per $p$ diuiſa vnitatem relinquet.

COROLL.

## COROLL. 5.

28. Dabitur ergo poteſtas $r^{\lambda}$, quae per $p$ diuiſa vnitatem relinquit, quae vtique in ſerie reſiduorum continetur, ſiquidem $r$ ſit numerus ad $p$ primus. Tum autem poteſtas $r^{\lambda+1}$ dabit reſiduum $r$, poteſtas $r^{\lambda+2}$ reſiduum $r^2$, et $r^{\lambda+3}$ reſiduum $r^3$ etc. ſicque hae poteſtates altiores eadem reſidua reproducunt, quae poteſtates inferiores $r$, $r^2$, $r^3$, etc.

## COROLL. 6.

29. Cum igitur plura reſidua diuerſa prouenire nequeant, quam vel $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$, patet, dari numerum $\lambda$, non maiorem, quam $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$, ita vt poteſtas $r^{\lambda}$ per $p$ diuiſa vnitatem relinquat.

## SCHOLION.

30. Hinc ergo intelligitur, quomodo fieri poſſit, vt etiamſi poteſtates $r^2$, $r^3$, $r^4$, $r^5$ etc. in infinitum progrediantur, tamen ex iis reſidua numero finita oriantur, ſi per diuiſorem $p$ diuidantur. Demonſtraui quidem in diſſertatione ſuperiori, ſi $r$ ſit numerus ad $p$ primus, dari ſemper eiusmodi poteſtatem $r^{\lambda}$, quae per $p$ diuiſa vnitatem relinquat, ita vt ſit $\lambda < p$. Nunc autem videmus, ſi $r$ iam in ſerie reſiduorum ex quadratis natorum contineatur, tum exponentem $\lambda$ etiam minorem fieri, quam $\frac{p}{2}$.

## THEOREMA. 6.

31. Si in ſerie reſiduorum 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. quae ex diuiſione numerorum quadratorum per nume-

rum

rum $p$ oriuntur, occurrant numeri $r$ et $s$, ibidem quoque occurret horum numerorum productum $rs$, vel reſiduum quod ex eius diuiſione per numerum $p$ enaſcitur.

## DEMONSTRATIO.

Proueniet reſiduum $r$ ex quadrato $aa$, et reſiduum $s$ ex quadrato $bb$, erit $aa = mp + r$, et $bb = np + s$; hinc fiet quadratum $aabb = mnpp + msp + nrp + rs$, quod ergo per $p$ diuiſum reſiduum relinquet $rs$, vel ſi $rs > p$, idem relinquet reſiduum, quod oritur ex $rs$. Quare cum reſiduum ex quadrato $aabb$ natum in ſerie reſiduorum contineatur, ibi quoque $rs$, ſeu reſiduum inde ortum reperietur.

## COROLL. 1.

32. In ſerie ergo reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. ſi occurrant duo numeri $r$ et $s$, ibidem quoque occurrent nonſolum poteſtates $r, r^2, r^3, r^4$ etc. et $s, s^2, s^3. s^4$, etc. ſed etiam producta ex binis terminis quibuscunque $rs, r^2s, rs^2, r^3s, r^2s^2, rs^3$ etc.

## COROLL. 2.

33. Hinc igitur patet, ſi formula $\frac{1}{(1-r)(r-s)}$ in ſeriem reſoluatur. $1 + r + s + rr + rs + ss + r^3 + r^2s + rss + s^3 +$ etc. ſingulos terminos huius ſeriei in ſerie reſiduorum occurrere, vel etiam reſidua ex his terminis diuiſione per $p$ orta.

## COROLL. 3.

34. Etiamſi autem horum terminorum numerus ſit infinitus, tamen conſtat, plura ex iis reſidua diuerſa produci non poſſe, quam vel $\frac{p-1}{4}$, vel $\frac{p}{4}$, prout $p$ fuerit numerus vel impar, vel par.

## SCHOLION.

35. Quo clarius appareat, quomodo ex his terminis numero infinitis, tamen reſiduorum diuerſorum numerus finitus et quidem non maior, quam $\frac{p-1}{2}$, vel $\frac{p}{2}$ oriatur, euoluamus exemplum aliquod, ſitque $p = 19$, erit $\frac{p-1}{2} = 9$, vnde

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ex his quadratis | 1, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | 49, | 64, | 81 |
| orientur reſidua | 1, | 4, | 9, | 16, | 6, | 17, | 11, | 7, | 5 |

Ex hac ſerie reſiduorum contemplemur hos duos numeros 5 et 6, ex quibus formemus primo ſeries poteſtatum

5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125, etc.
6, 36, 216, 1296, 7776, 46656, 279936, etc.

Ex illa ſerie per $p = 19$ diuiſa prodeunt reſidua:

5, 6, 11, 17, 9, 7, 16, 4, 1,

ſequens ſcilicet reſiduum ſemper inuenitur, ſi praecedens per 5 multiplicetur, et productum, ſi ſit $> 19$, infra 19 deprimatur. Simili modo ex poteſtatibus numeri 6 haec prodibunt reſidua:

6, 17, 7, 4, 5, 11, 9, 16, 1

Porro

Porro ſi haec ſingula reſidua per ſingula ſuperiora multiplicentur, et producta infra 19 deprimantur, iidem prodeunt numeri; multiplicetur enim inferior ſeries primo per 5, tum per 6, et 11, 17, etc. vt ſequitur:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| per 5: | 11, | 9, | 16, | 1, | 6, | 17, | 7, | 4, | 5, |
| per 6: | 17, | 7, | 4, | 5, | 11, | 9, | 16, | 1, | 6, |
| per 11: | 9, | 16, | 1, | 6, | 17, | 7, | 4, | 5, | 11, |
| per 17: | 7, | 4, | 5, | 11, | 9, | 16, | 1, | 6, | 17, |
| per 9: | 16, | 1, | 6, | 17, | 7, | 4, | 5, | 11, | 9, |
| per 7: | 4, | 5, | 11, | 9, | 16, | 1, | 6, | 17, | 7, |
| per 16: | 1, | 6, | 17, | 7, | 4, | 5, | 11, | 9, | 16, |
| per 4: | 5 | 11, | 9, | 16, | 1, | 6, | 17, | 7, | 4, |

Perſpicitur igitur, quomodocunque hi numeri, 1, 4, 9. 16, 6, 17, 11, 7, 5 ſeriem reſiduorum conſtituentes, inter ſe per multiplicationem combinentur, ſiquidem diuiſione per 19 facta infra 19 deprimantur, eosdem ſemper numeros recurrere, neque vnquam vllum numerum eorum, qui non ſunt reſidua, nempe 2, 3, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18 prodire.

## C O R O L L. 4.

36. Si ergo ſit 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. ſeries reſiduorum omnium, quae ex diuiſione quadratorum per numerum $p$ reſultant, in eadem ſerie quoque occurrent omnia producta ex binis pluribusue numerorum $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. Ergo ſi haec expreſſio $\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)\,etc.}$ in ſeriem euoluatur, omnes eius termini in ſerie reſiduorum occurrent.

## THEOREMA. 7.

37. Si in ſerie reſiduorum 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. quae ex diuiſione quadratorum per numerum $p$ prodeunt, reperiantur numeri $r$ et $rs$, qui ſint ad $p$ primi, quorum ille huius eſt factor, tunc in eadem reſiduorum ſerie etiam numerus $s$ continebitur.

## DEMONSTRATIO.

Proueniat reſiduum $r$ ex quadrato $aa$ et $rs$ ex $bb$, erit $aa = mp + r$, et $bb = np + ss$: vnde fit $bb - aas = np - mps$, ſicque $bb - aas$ erit per $p$ diuiſibile. At cum $r$ et $rs$ ſint numeri ad $p$ primi, erunt quoque quadrata $aa$ et $bb$ ad $p$ prima, vnde ſi haec quadrata $aa$ et $bb$ inter ſe non ſint prima, per communem diuiſorem quadratum ad prima reduci poterunt, ita vt $bb - aas$ maneat per $p$ diuiſibile. Sint ergo $b$ et $a$ numeri inter ſe primi, atque cum etiam haec forma $(mp \pm b)^2 - aas$ ſit per $p$ diuiſibilis, ſemper pro $m$ eiusmodi numerus aſſignari poteſt, vt fiat $mp \pm b$ multiplum ipſius $a$. Sit ergo $mp \pm b = ac$, erit $aacc - aas$ per $p$ diuiſibile, quod cum ſit $= aa(cc - s)$, alterque factor $aa$ ſit ad $p$ primus, neceſſe eſt, vt alter factor $cc - s$ per $p$ ſit diuiſibilis, vnde quadratum $cc$ per $p$ diuiſum relinquet $s$, ex quo numerus $s$ in ſerie reſiduorum 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. reperietur, ſiquidem ibi numeri $r$ et $rs$ occurrant, iique ſint ad $p$ primi.

COROLL.

## COROLL. 1.

38. Vt igitur veritas theorematis conſiſtat, neceſſe eſt, vt numeri $r$ et $rs$, ſeu $r$ et $s$ ſint ad diuiſorem $p$ primi. Supra enim vidimus, ſi ſit $p = 12$, in reſiduis reperiri numeros 4 et 0, ſeu 4 et 12, hinc autem, poſito $r = 4$ et $rs = 12$, non ſequitur numerum $s = 3$ in reſiduis reperiri: quia $r$ et $s$ non ſunt numeri ad $p$ primi: ac reuera etiam numerus $s$ inter non-reſidua continetur.

## COROLL. 2.

39. Sin autem diuiſor $p$ ſit numerus primus, quia tum omnia reſidua $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. ad eum ſunt prima, ſi in iis occurrant numeri $r$ et $rs$, tum etiam certo in iis occurret numerus $s$.

## COROLL. 3.

40. Si inter reſidua occurrant numeri $r$ et $s$ primi ad $p$, quia reſiduo $r$ aequiualentia cenſenda ſunt reſidua $p+r$; $2p+r$, et in genere $np+r$, ſi fuerit $np+r = ts$, tum etiam numerus $t$ inter reſidua reperietur.

## SCHOLION.

41. Ne ad huiusmodi exceptiones, quando reſidua non ſunt numeri ad $p$ primi, reſpicere obligemur, in ſequentibus ponamus diuiſorem $p$ ſemper eſſe numerum primum; et cum reſidua ex binario orta ſint obuia,

ſit diuiſor $p$ ſimul numerus impar, ſeu $p = 2q + 1$, tum ergo ſeries reſiduorum formabitur ex his terminis:

$1, 4, 9, 16, \text{-------} qq$

ita vt eorum numerus, quatenus inter ſe ſunt diuerſa, maior eſſe nequeat, quam $q$. Si igitur reſidua ex hoc diuiſore primo $p = 2q + 1$ ſint $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. in hac ſerie non ſolum producta ex binis pluribusue terminorum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. occurrent, ſed quia omnia haec reſidua ad $p$ ſunt prima, ſi inter ea occurrant $r$ et $rs$, ita vt vnum per aliud ſit diuiſibile, tum etiam quotus inde natus $s$ in eadem ſerie reſiduorum continebitur.

## THEOREMA 8.

42. Si ex diuiſore primo $p = 2q + 1$, per quem omnes numeri quadrati diuidantur, naſcatur ſeries reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ etc. quorum numerus eſt $= q$, omnia haec reſidua inter ſe erunt inaequalia.

## DEMONSTRATIO.

Primo patet, nullum reſiduum in hac ſerie eſſe poſſe $= 0$, cum enim naſcantur ex quadratis ipſo $qq$ non maioribus, nullum horum quadratorum per numerum primum $p = 2q + 1$ eſt diuiſibile; igitur cyphra inter reſidua multo minus bis occurrere poterit. Ponamus autem duo reſidua, quae ex quadratis $aa$ et $bb$ oriuntur, eſſe aequalia, eritque differentia horum quadratorum $aa - bb$ per diuiſorem $p = 2q + 1$ diuiſibilis. At cum omnia haec reſidua $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. ex quadratis minimis, quae

quae $qq$ non excedunt, oriantur, quadrata illa $aa$ et $bb$ non ſuperabunt $qq$, eritque propterea neque $a > q$, neque $b > q$, neque idcirco $a + b > 2q$; vnde certo erit $a + b < p$. Cum igitur differentia quadratorum $aa - bb$ eſſet per $p$ diuiſibilis, ſiquidem reſidua inde nata eſſent aequalia, et $p$ ſit numerus primus, vel ſumma $a + b$, vel differentia $a - b$ foret per $p$ diuiſibilis; vtrumque autem, ob tam $a - b < p$, quam $a + b < p$, fieri nequit. Ergo omnia reſidua, quae ex diuiſione quadratorum $1, 4, 9, 16, \ldots qq$ per numerum primum $p = 2q + 1$ reſultant, inter ſe ſunt inaequalia.

## COROLL. 1.

43. Numerus igitur omnium reſiduorum diuerſorum, quae ex diuiſione quadratorum per numerum primum $p = 2q + 1$ oriuntur, certo eſt $= q$; ante enim oſtenſum eſt, eum non eſſe maiorem, quam $q$; hic autem euicimus, eum non eſſe minorem, quam $q$.

## COROLL. 2.

44. Cum numerus omnium numerorum ipſo diviſore $p = 2q + 1$ minorum ſit $= p - 1 = 2q$, patet, horum numerorum ſemiſſem tantum in ſerie reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma$, etc. occurrere eamque conſtituere, alterum vero ſemiſſem, conſtituere ſeriem non-reſiduorum: ideoque ſi $p$ ſit numerus primus, ſeriem non-reſiduorum etiam ex $q$ numeris conſtare.

COROLL.

## COROLL. 3.

45. Si ergo $x$ ſit numerus quicunque ex ſerie non-reſiduorum diuiſori $p$ reſpondentium, certo affirmare poſſumus, quicquid ſit $n$, nullum numerum in hac forma $np + x$ eſſe poſſe quadratum.

## SCHOLION.

46. Quia nunc inueſtigationes noſtras tantum ad diuiſores primos dirigimus, expediet tam reſidua, quam non-reſidua, quae minoribus numeris primis reſpondent, hic exhibere. In genere ſcilicet ſi diuiſor ſit $p$, ſeriem reſiduorum per 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. et ſeriem non-reſiduorum per $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ etc. repreſentamus; et quo facilius coniunctim tam reſidua, quam non-reſidua, referantur, hoc modo exponemus:

$$p\left\{\begin{matrix}1, & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta & \text{etc.}\\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & \text{etc.}\end{matrix}\right\}$$

duas nimirum ſeries numerorum quouis caſu ſcribemus, quarum ſuperior reſidua, inferior non-reſidua continet, et vtrique diuiſorem $p$, ad quem pertinent, praefigemus. Hoc modo reſidua et non-reſidua, quae ex diuiſoribus primis ſimplicioribus reſultant, ita indicabuntur:

$$3\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\};\quad 5\left\{\begin{matrix}1, & 4\\2, & 3\end{matrix}\right\};\quad 7\left\{\begin{matrix}1, & 4, & 2\\3, & 5, & 6\end{matrix}\right\};\quad 11\left\{\begin{matrix}1, & 4, & 9, & 5, & 3\\2, & 6, & 7, & 8, & 10\end{matrix}\right\};$$

$$13\left\{\begin{matrix}1, & 4, & 9, & 3, & 12, & 10\\2, & 5, & 6, & 7, & 8, & 11\end{matrix}\right\};\quad 17\left\{\begin{matrix}1, & 4, & 9, & 16, & 8, & 2, & 15, & 13\\3, & 5, & 6, & 7, & 10, & 11, & 12, & 14\end{matrix}\right\};$$

$$19\left\{\begin{matrix}1, & 4, & 9, & 16, & 6, & 17, & 11, & 7, & 5\\2, & 3, & 8, & 10, & 12, & 13, & 14, & 15, & 18\end{matrix}\right\};\quad 23\left\{\begin{matrix}1, & 4, & 9, & 16, & 2, & 13, & 3, & 18, & 12, & 8, & 6\\5, & 7, & 10, & 11, & 14, & 15, & 17, & 19, & 20, & 21, & 22\end{matrix}\right\};$$

$$29\left\{\begin{matrix}1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 7, & 20, & 6, & 23, & 13, & 5, & 28, & 24, & 22\\2, & 3, & 8, & 10, & 11, & 12, & 14, & 15, & 17, & 18, & 19, & 21, & 26, & 27\end{matrix}\right\};$$

Reſidua

Reſidua hic eo ordine, quo ex quadratis naſcuntur, ſunt poſita, non-reſidua autem, quia nullo ordine connectuntur, a minimis ad maiora progrediendo collocauimus. Exempla haec quoque in eum finem ſeruire poterint, vt in iis proprietates reſiduorum ante demonſtratae examinentur.

## THEOREMA 9.

47. Si ex diuiſione quadratorum per numerum primum $p = 2q + 1$ naſcatur haec ſeries reſiduorum, $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. haecque ſeries non-reſiduorum $a, b, c, d, e$, etc. atque in hac ſerie non-reſiduorum occurrat numerus $r$, in eadem quoque occurrent omnes hi numeri $\alpha r, \beta r, \gamma r, \delta r$, etc. vel eorum reſidua diuiſione per $p$ relicta.

## DEMONSTRATIO.

Quicunque enim horum numerorum, vt $\alpha r$, vel in ſerie reſiduorum continetur, vel in ſerie non-reſiduorum. At cum $\alpha$ in ſerie reſiduorum contineatur, ſi $\alpha r$ ibidem contineretur, neceſſario quoque $r$ in ſerie reſiduorum exiſteret. Quare cum per hypotheſin $r$ ſit numerus ex ſerie non-reſiduorum, numerus $\alpha r$ non erit in ſerie reſiduorum, habebit ergo $\alpha r$ locum in ſerie non-reſiduorum, quod idem de numeris $\beta r, \gamma r, \delta r$, etc. valet: Quod autem demonſtrauimus de his productis $\beta r, \gamma r, \delta r$, etc. ſi ſint maiora, quam $p$, id intelligendum eſt de reſiduis, quae haec producta per $p$ diuiſa relinquunt.

 COROL.

### COROLL. 1.

48. Quia omnes numeri $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta,$ etc. quorum numerus eſt $= q$, ſunt inter ſe diuerſi; ſequitur quoque, omnes hos numeros $r, \alpha r, \beta r, \gamma r, \delta r,$ etc. eſſe inter ſe diuerſos: vnde, ſi omnia reſidua habeantur, ex vnico non-reſiduo cognito reliqua omnia non-reſidua definiuntur.

### COROLL. 2.

49. Dabit ergo ſeries $r, \alpha r, \beta r, \gamma r, \delta r,$ etc. omnia plane non-reſidua; continet enim $q$ numeros diverſos, totidemque et non plura exiſtunt non-reſidua, ſiquidem diuiſor $p$ eſt numerus primus.

### COROLL. 3.

50. Si ergo ex ſerie non-reſiduorum quilibet alius numerus $s$ capiatur, eius producta $\alpha s, \beta s, \gamma s,$ etc. alios numeros pro reſiduis non praebent, niſi qui ex quouis alio $r$ hoc modo ſunt reperti.

### THEOREMA 10.

51. Producta ex binis numeris ſeriei non-reſiduorum continentur in ſerie reſiduorum, ſiquidem haec reſidua naſcantur ex diuiſione numerorum quadratorum per quempiam numerum primum.

## DEMONSTRATIO.

Sit enim $p = 2q + 1$ diuiſor primus, atque ſeries reſiduorum ſit $1$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc ſeries autem non-reſiduorum ſit $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, etc. Vidimus autem, ſi $r$ ſit non-reſiduum quodcunque, ſeriem non-reſiduorum hoc modo quoque exhiberi: $r$, $\alpha r$, $\beta r$, $\gamma r$, $\delta r$, etc. Iam productum ex duobus quibuscunque horum terminorum $\alpha \beta r^2$, conſtat ex duobus factoribus $\alpha \beta$ et $r r$, quorum vterque in ſerie reſiduorum continetur, quia omnia quadrata, ac propterea etiam $r r$ ibi occurrunt; vnde perſpicuum eſt, productum ex binis quibusque non-reſiduis in ſerie reſiduorum contineri.

## COROLL. 1.

52. Vt igitur productum ex duobus reſiduis dat reſiduum, ita quoque productum ex duobus non reſiduis dabit reſiduum. Sed productum ex reſiduo et non-reſiduo ſemper producit non-reſiduum.

## COROLL. 2.

53. Hinc etiam ſequitur, vti reſiduum per reſiduum diuiſum dat reſiduum, ita quoque non-reſiduum per non reſiduum diuiſum dare reſiduum. Verum reſiduum per non-reſiduum, vel viciſſim non-reſiduum per reſiduum diuiſum praebet non-reſiduum.

## COROLL. 3.

54. Quemadmodum bina non-reſidua inuicem multiplicata reſiduum producunt; ita terna non-reſidua

E 2 inuicem

inuicem multiplicata praebebunt non-reſiduum: quaterna vero non reſidua iterum reſiduum producunt, at quina non-reſiduum, et ſic deinceps.

## DEFINITIO.

55. Complementum reſidui eſt eius defectus a diuiſore, ex quo eſt ortum: ſic ſi diuiſor ſit $= p$ et reſiduum $= r$, erit complementum reſidui $= p - r$.

## COROLL. 1.

56. Quia ratione reſiduorum omnes hi numeri $r, p + r, 2p + r$, et in genere $np + r$ pro iisdem habentur, quicunque numerus pro $n$ ſumatur, erit eorum complementum $= p - np - r$, vnde ſi ſumatur $n = 1$, complementum reſidui $r$ erit $= - r$.

## COROLL. 2.

57. Si $n$ ſumatur $= - 1$, reſiduum $r$ etiam per $r - p$ exprimi poteſt, ita vt ſit negatiuum. In diuiſione enim, ſi quotus nimis magnus accipitur, ad reſidua negatiua peruenitur. Sic reſiduum affirmatiuum $r$ aequiualebit reſiduo negatiuo $r - p$.

## COROLL. 3.

58. Si ſit $r > \frac{1}{2}p$, tum hoc reſiduum negatiue exprimi poterit per $r - p$, quod erit minus, quam $\frac{1}{2}p$. Ita ſi expreſſiones negatiuae in vſum vocentur, omnia reſidua per numeros exhiberi poterunt, ſemiſſe diuiſoris

$\frac{1}{2}p$

$\frac{1}{2}p$ non maiores. Sic pro diuiſore $p = 23$ habebuntur haec reſidua per numeros non maiores, quam $\frac{23}{2}$ expreſſa: 1, 4, 9, − 7, 2, − 10, 3, − 5, − 11, 8, 6.

## COROLL. 4.

59. Similique modo non-reſidua etiam per numeros ipſo $\frac{1}{2}p$ non maiores exhiberi poterunt, eruntque pro diuiſore $p = 23$ haec non-reſidua: 5, 7, 10, 11, −9, −8, −6, −4, −3, −2, −1. Vnde ſi $p = 2q + 1$, numerus tam reſiduorum, quam non-reſiduorum, erit $= q$, neque in vtraque ſerie occurrunt numeri maiores, quam $q$.

## COROLL. 5.

60. Si hoc modo reſidua exprimantur, ſtatim patet, vtrum cuiuspiam reſidui complementum in eadem ſerie reſiduorum contineatur, nec ne. Nempe ſi $r$ ſit reſiduum, erit $-r$ eius complementum, et viciſſim ſi $-r$ ſit reſiduum, erit $+r$ eius complementum. Quare niſi in ſerie reſiduorum idem numerus bis occurrat, affirmatiue ſcilicet et negatiue, eius complementum in ſerie reſiduorum non continetur.

## THEOREMA 11.

61. Si in ſerie reſiduorum 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. quae ex diuiſione quadratorum per numerum primum $p = 2q + 1$ generantur, vnius termini occurrat complementum, tum ſimul omnium terminorum complementa in eadem ſerie occurrent.

 SOLUTIO.

## SOLUTIO.

Sit $r$ id reſiduum, cuius complementum $-r$ quoque in ſerie $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. occurrat. Cum igitur $-r$ per $r$ diuiſum det $-1$, in eadem ſerie quoque nnmerus $-1$ occurret; ſeu valor cuiuspiam litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. erit $= -1$. Quoniam ergo in eadem ſerie producta ex binis terminis ſimul reperiuntur, ibidem occurrent termini $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$, etc. Cuiusvis ergo reſidui complementum ſimul in ſerie reſiduorum reperietur, ſiquidem vnici termini complementum in ea occurrat.

## COROLL. 1.

62. Si ergo vnici termini $r$ complementum $-r$ in ſerie reſiduorum contineatur, tum quilibet numerus huius ſeriei bis occurret, primo ſcilicet affirmatiue, tum vero etiam negatiue. In ſerie nempe reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. etiam continebuntur termini $-1$, $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$, etc.

## COROLL. 2.

63. Cum igitur hoc caſu in ſerie reſiduorum quilibet terminus bis occurrat, numerus omnium terminorum neceſſario erit par. At numerus omnium terminorum eſt $= q$, ergo niſi ſit $q$ numerus par, fieri nequit, vt complementa reſiduorum ſimul in ſerie reſiduorum contineantur.

COROLL.

## COROLL. 3.

64. Si igitur $q$ eſt numerus impar, puta $q = 2n + 1$, ita vt ſit $p = 4n + 3$, in ſerie reſiduorum nullus plane occurrit numerus, cuius complementum ſimul in ea ſerie contineatur. Omnia ergo complementa hoc caſu in ſeriem non reſiduorum ingredientur, eritque vtrinque terminorum numerus impar $= q = 2n + 1$.

## SCHOLION.

65. Hinc ergo ſummum diſcrimen agnoſcitur, quod inter numeros primos $p = 2q + 1$ intercedit, prout $q$ fuerit numerus par, vel impar: cum poſteriori caſu certo ſciamus, nullius reſidui complementum in reſiduorum ſerie contineri. Quodſi ergo priori caſu ponamus $q = 2n$, poſteriori $q = 2n - 1$, illo caſu erit numerus primus $p = 4n + 1$, hoc vero $p = 4n - 1$; vnde patet, omnes numeros primos, binario excepto, vel vnitate ſuperare multiplum quaternarii, vel vnitate ab eo deficere; ſicque duas obtinemus numerorum claſſes, quarum altera in forma $4n + 1$, altera in forma $4n - 1$, continetur. Prioris claſſis $4n + 1$ ſunt ergo numeri primi: 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, etc. poſterioris vero claſſis $4n - 1$ hi: 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43 47, 59, 67, 71, 79, 83. De numeris primis claſſis prioris Fermatius olim pronunciauit, ſingulos eſſe aggregata duorum quadratorum, cuius theorematis veritatem nuper tandem poſt plures conatus demonſtraui. De numeris autem poſterioris claſſis facile oſtenditur, nullum eorum eſſe ſummam duorum quadratorum; quin etiam

etiam mox demonſtrabo, hic quidem ſummam duorum quadratorum $aa + bb$ exhiberi poſſe, quae ſit per eiusmodi numerum primum $p = 4n - 1$ diuiſibilis, niſi vtrumque quadratum $aa$ et $bb$ ſeorſim per eum diuiſibile exiſtat. De his tamen numeris Fermatius affirmauit, ſingulos vel eſſe trium, vel quatuor quadratorum aggregata; ita videmus eſſe $3 = 1 + 1 + 1$; $7 = 1 + 1 + 1 + 4$; $11 = 1 + 1 + 9$; $19 = 1 + 9 + 9$; $23 = 1 + 4 + 9 + 9$; $31 = 4 + 9 + 9 + 9 = 1 + 1 + 4 + 25$; etc. Verum nullum exiſtere huiusmodi numerum, qui non ad minimum in quatuor quadrata reſolui poſſit, etſi Fermatius eius demonſtrationem ſe inueniſſe ſit profeſſus, tamen nusquam eam publicauit, ita vt cum ipſo penitus interiiſſe videatur, neque deinceps quisquam inuentus eſt, qui hanc demonſtrationem, quae in analyſi Diophantaea et vniuerſa numerorum ſcientia maximi eſt momenti, reperire potuerit. Equidem hic demonſtrabo, quocunque propoſito numero primo formae $4n - 1$, ſemper ſummam quatuor quadratorum, quin etiam trium, exhiberi poſſe, quae per eum ſit diuiſibilis. Cum igitur etiam demonſtrari queat, productum ex duobus numeris, quorum vterque eſt ſumma quadratorum, etiam eſſe quatuor quadratorum aggregata, non procul a demonſtratione deſiderata abeſſe videmur. Tantum enim ſupereſt, vt demonſtretur, ſi ſumma quatuor quadratorum fuerit diuiſibilis per numerum, qui etiam ſit ſumma quatuor quadratorum, quotum quoque certo fore ſummam quatuor quadratorum.

THEORE-

## THEOREMA 12.

67. Si omnia quadrata per numerum primum $= 4n - 1$ diuidantur, indeque oriatur ſeries reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. nullius reſidui complementum ſimul in hac ſerie reſiduorum continebitur.

## DEMONSTRATIO.

Omnia reſidua reſultant ex diuiſione horum quadratorum:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots\ldots\ (2n-1)^2$$

reſidua: $1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots\ldots\ \nu$

numerus ergo horum reſiduorum eſt $= 2n - 1$ ideoque impar. At ſi vnius reſidui $\alpha$ complementum $p - \alpha$ ſeu $-\alpha$ in eadem ſerie extaret, tum ſimul omnium reſiduorum complementa ibidem occurrere deberent, ſicque cum vnumquodque reſiduum bis, nempe cum ſigno $+$ et cum ſigno $-$ adeſſet, numerus reſiduorum eſſet par. Quare cum ſit impar, fieri nequit, vt vel vnici reſidui complementum ſimul in eadem reſiduorum ſerie contineatur.

## COROLL. 1.

67. Si vltimus ſeriei reſiduorum terminus ponatur $= \nu$, quia oritur ex quadrato $(2n-1)^2 = 4nn - 4n + 1$ per $4n - 1$ diuiſo, erit reſiduum $\nu = -3n + 1 = n$, ſumto quoto $n - 1$. Ergo eius complementum $-n$ ſeu $3n - 1$ in ſerie reſiduorum non reperitur.

Numerus

Numerus ergo $-n$ ſeu $3n-1$ certo erit in ſerie non-reſiduorum.

### COROLL. 2.

68. Cum $mp-n$ ſeu $m(4n-1)-n$ omnes numeros complectatur, qui per $4n-1$ diuiſi reſiduum dant $-n$, patet nullum horum numerorum $m(4n-1)-n$ ſeu $4mn-m-n$ vnquam eſſe poſſe quadratum.

### COROLL. 3.

69. Cum in ſerie reſiduorum occurrant numeri quadrati $1, 4, 9, 16$, etc. in eadem certe non occurrent eorum complementa $-1, -4, -9, -16$, etc. Numeri ergo quadrati ſigno $-$ affecti in ſeriem non-reſiduorum ingredientur.

### THEOREMA 13.

70. Non datur ſumma duorum quadratorum, quae ſit diuiſibilis per numerum primum formae $4n-1$, niſi vtrumque quadratum ſeorſim per eundem ſit diuiſibile: ſeu non datur ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum per numerum primum $4n-1$ diuiſibilis.

### DEMONSTRATIO.

Ponamus enim ſummam duorum quadratorum $aa+bb$ eſſe per numerum primum $4n-1$ diuiſibilem, neque tamen vel $aa$ vel $bb$ ſeorſim eſſe per $4n-1$ diuiſibile. Sit ergo $r$ reſiduum, quod in diui-

ſione

ſione quadrati $aa$ per $4n-1$, relinquitur et $s$ reſiduum ex diuiſione quadrati $bb$ ortum; atque tam $r$ quam $s$ in ſerie reſiduorum 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. occurret. Iam ſumma quadratorum $aa+bb$ per $4n-1$ diuiſa relinquet reſiduum $r+s$, quod cum per hypotheſin eſſe debeat $=$ diuiſori $4n-1$, erit $s=4n-1-r$, ſeu $s=-r$, ideoque $s$ erit complementum reſidui $r$. Quare ſi $r$ in ſerie reſiduorum contineatur, eius complementum $s$ in ea certe non occurret: vnde ſumto quadrato quocunque $aa$ nullum datur aliud quadratum $bb$ eiusmodi, vt ſumma $aa+bb$ fiat per numerum primum $4n-1$ diuiſibilis: niſi ipſum quadratum $aa$ per ſe ſit diuiſibile per $4n-1$, quo caſu etiam $bb$ per $4n-1$ diuiſibile eſſe debet. Nulla ergo datur ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum, quae ſit per numerum primum $4n-1$ diuiſibilis.

## COROLL. 1.

71. Non ergo datur huiusmodi formae $aa+1$ numerus, qui ſit per numerum primum $4n-1$ diuiſibilis. Ad hoc enim opus eſſet, vt reſiduum ex quadrato $aa$ ortum eſſet $=-1$, quod autem in ſerie reſiduorum non exiſtit.

## COROLL. 2.

72. Cum ſumma duorum quadratorum $aa+bb$ per nullum numerum primum formae $4n-1$ ſit diviſibilis, etiam per nullum numerum compoſitum $p$, qui factorem primum habet formae $4n-1$, erit diui-



ſibilis,

ſibilis, ſi enim per hunc numerum $p$ eſſet diuiſibilis, etiam per eius factorem $4n-1$ diuiſibilis foret.

## THEOREMA 14.

73. Siue numerus $4n-1$ ſit primus, ſiue compoſitus, nulla datur ſumma duorum quadratorum, inter ſe primorum per eum numerum $4n-1$ diuiſibilis.

## DEMONSTRATIO.

Si enim numerus $4n-1$ ſit primus, iam demonſtrata eſt veritas theorematis. At ſi $4n-1$ non ſit numerus primus, erit productum ex aliquot numeris primis, et quidem imparibus, cum ipſe numerus $4n-1$ ſit impar. Omnes autem numeri primi ſunt vel formae $4m+1$, vel $4m-1$: ſed omnes factores numeri $4n-1$ eſſe nequeunt formae $4m+1$, quotcunque enim numeri huius formae $4m+1$ in ſe inuicem multiplicentur, productum ſemper erit numerus formae $4n+1$, ſeu vnitate excedet multiplum quaternarii. Quare neceſſe eſt, vt numerus $4n-1$ vnum ad minimum habeat factorem primum formae $4m-1$, et quia per talem numerum primum nulla ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum eſt diuiſibilis, nulla etiam datur, quae per numerum compoſitum $4n-1$ eſſet diuiſibilis.

## COROLL. 1.

74. Cum nulla detur ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum per numerum $4n-1$, ſiue ſit primus

primus, ſiue compoſitus, diuiſibilis, multo minus numerus $4n-1$ ipſe erit ſumma duorum quadratorum. Si iam eſſet $4n - 1 = aa + bb$, vtrumque quadratum ſeorſim per $4n - 1$ diuiſibile eſſe deberet, quod, cum vtrumque ſit minus quam $4n - 1$, fieri nequit.

## SCHOLION.

75. Nullum numerum formae $4n - 1$ eſſe poſſe ſummam duorum quadratorum, etiam facillime hoc modo oſtenditur. Si enim numerus $4n - 1$ eſſet ſumma duorum quadratorum alterum eſſe deberet par, alterum impar. At omnia quadrata paria ſunt numeri huius formae $4f$, et omnia quadrata imparia numeri huius formae $4g + 1$. Summa ergo duorum quadratorum, quorum alterum eſt par, alterum impar, erit numerus formae $4f + 4g + 1$, ſeu $4n + 1$; ergo numerus formae $4n - 1$ non poteſt eſſe ſumma duorum quadratorum.

## COROLL. 2.

76. Nullus etiam numerus, qui factorem habet formae $4n - 1$, poteſt eſſe diuiſor ſummae duorum quadratorum inter ſe primorum: ſi enim eſſet diuiſor, etiam eius factor $4n - 1$, foret diuiſor, quod fieri nequit.

## COROLL. 3.

77. Multo ergo minus huiusmodi numerus, qui factorem habet $4n - 1$, eſſe poteſt ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum. Ita impoſſibile eſt, vt

ſit $m(4n-1)=aa+bb$, ſi quidem $a$ et $b$ ſint numeri inter ſe primi.

### THEOREMA 15.

78. Nullus numerus in hac forma $4mn-m-n$ contentus, quicunque numeri pro $m$ et $n$ capiantur, vnquam eſſe poteſt quadratum.

### DEMONSTRATIO.

Cum nullus numerus, qui factorem habet $4n-1$, eſſe queat ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum, ſeu quae praeter vnitatem nullum habeant communem diuiſorem, ſequitur fieri non poſſe, vt ſit $(4m-1)(4n-1)=1+aa$. Ergo non erit $16mn-4m-4n=aa$: vnde ne eius quadrans quidem $4mn-m-n$ vnquam quadratum eſſe poteſt.

### THEOREMA 16.

79. Si in ſerie reſiduorum $1$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. quae ex diuiſione quadratorum per numerum quemcunque $p$ reſultant, cuiuspiam reſidui complementum in eadem ſerie reſiduorum occurrat, tum duo quadrata exhiberi poterunt, quorum ſumma ſit per eundem numerum $p$ diuiſibilis, etiamſi neutrum ſeorſim per $p$ ſit diuiſibile.

### DEMONSTRATIO.

Praebeat quadratum $aa$ reſiduum $=r$, quadratum autem $bb$ reſiduum $=-r$ ſeu $p-r$, quod illius eſt comple-

complementum, ita vt $r$ ſit id reſiduum, cuius complementum ſimul in ſerie reſiduorum contineatur. Iam manifeſtum eſt, ſummam horum quadratorum $aa + bb$ fore per numerum $p$ diuiſibilem.

## COROLL. 1.

80. Si $p$ ſit numerus primus, ſtatim atque vnius reſidui complementum in ſerie reſiduorum occurrit, etiam ſingulorum reſiduorum complementa ibidem inerunt. Sumto ergo quadrato quocunque $aa$, cuius reſiduum ſit $= r$, dabitur aliud $xx$, cuius reſiduum erit $= -r$, ita vt $x$ ſit non maius, quam $\frac{p}{2}$, atque ſumma $aa + xx$ erit per $p$ diuiſibilis.

## COROLL. 2.

81. Si igitur detur ſumma duorum quadratorum $aa + bb$ per numerum primum $p$ diuiſibilis, quia reſiduorum ex $aa$ et $bb$ ortorum alterum alterius eſt complementum; reſidui ex quocunque alio quadrato $cc$ orti complementum in ſerie reſiduorum quoque reperietur. Dabitur ergo ſumma duorum quadratorum $cc + xx$ per numerum $p$ diuiſibilis.

## COROLL. 3.

82. Ex praecedentibus autem patet, hunc caſum locum obtinere non poſſe, neque ſi $p$ ſit numerus formae $4n - 1$, neque ſi $p$ ſaltem habeat factorem huius formae: quia neutro caſu datur ſumma duorum quadratorum

torum per $p$ diuiſibilis, quae quidem quadrata ſint inter ſe prima.

## COROLL. 4.

83. Nulli ergo alii numeri primi relinquuntur, ad quos theorema hoc accommodari queat, niſi qui contineantur in hac forma $4n+1$.

## SCHOLION.

84. An autem omnes numeri primi formae $4n+1$ hanc habeant proprietatem, vt in ſeriebus reſiduorum inde ortis cuiusque termini complementum ſimul ibidem reperiatur; hic nondum eſt demonſtratum, neque deſperandum videtur, quin ex his iisdem principiis demonſtratio elici queat, etſi nondum mihi quidem eo pertingere licuit. Series autem reſiduorum ex ſimplicioribus numeris primis huius formae ortae ſequenti modo ſe habent, vbi quidem reſidua ſemiſſe cuiusque numeri maiora per numeros negatiuos exhibere viſum eſt, quo facilius, quaenam ſint aliorum complementa, appareat:

5 $\{1,-1\}$; 13 $\{1,4,-4,3,-1,-3\}$; 17 $\{1,4,-8,-1,8,2,-2,-4\}$

29 $\{1,4,9,-13,-4,7,-9,6,-6,13,5,-1,-5,-7\}$

37 $\{1,4,9,16,-12,-1,12,-10,7,-11,10,-4,-16,11,3,-3,-7,-9\}$

In his igitur ſeriebus perſpicuum eſt, cuiusque termini complementum ſimul in iis occurrere. Quod autem hoc neceſſario eueniat, ſi diuiſor ſit numerus primus formae $4n+1$, demonſtratio directa adhuc deſideratur, quae hoc modo inſtitui debere videtur. Prodeat ex numero primo $4n+1$ haec ſeries reſiduorum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc.

etc. quorum terminorum numerus eſt $2n$, iam ſi quis neget horum terminorum complementa ſimul in eadem ſerie contineri, is dicere debet, omnia complementa $-1, -\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$, etc. ſeriem non-reſiduorum conſtituere; quorum terminorum numerus cum ſit $= 2n$, ſequeretur, nulla alia praeterea dari non-reſidua, quare, ſi aſſignari poſſet quispiam numerus, in ſerie non-reſiduorum contentus, qui non eſſet complementum cuiuspiam termini in ſerie reſiduorum contentus, ſimul ſequeretur nullum plane complementum ſeriei reſiduorum in ſerie non-reſiduorum occurrere. Hoc ergo ſi demonſtrari poſſet, haberetur demonſtratio deſiderata, et quidem directa. Nam demonſtratio indirecta iam inde datur, quod demonſtraui, omnem numerum primum formae $4n+1$ eſſe ſummam duorum quadratorum: quare ſi ſit $4n+1 = aa+bb$, reſiduorum ex his quadratis $aa$ et $bb$ ortorum alterum alterius erit complementum, hincque porro recte concluditur, cuiusque reſidui complementum ſimul in ſerie reſiduorum contineri.

## THEOREMA 17.

85. *Si in ſerie reſiduorum* $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, *etc. quae ex diuiſione quadratorum per numerum quemcunque* $p$ *oriuntur, occurrat terminus, qui ſit complementum ſummae duorum aliorum terminorum, tum ſumma trium quadratorum exhiberi poteſt per numerum* $p$ *diviſibilis, ita vt nullius quadrati radix maior ſit quam* $\frac{p}{2}$.

## DEMONSTRATIO.

Sint $r$ et $s$ reſidua ex duobus quadratis $aa$ et $bb$ oriunda, quorum ſumma $= r+s$, eiusque ergo com-

plementum $= p - r - s$, ſeu $- r - s$. Iam ſi hoc complementum in ſerie reſiduorum 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. reperiatur, dabitur quadratum $cc < \frac{1}{4} pp$, quod per $p$ diuiſum relinquet $- r - s$; ſicque manifeſtum erit, ſummam horum trium quadratorum $aa + bb + cc$ fore per numerum $p$ diuiſibilem; neque horum quadratorum vllum maius eſſe, quam $\frac{1}{4} pp$.

## COROLL. 1.

86. Si igitur in ſerie reſiduorum 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. occurrat aliquis ex his numeris: $-2$; $-1-\alpha$; $-2\alpha$; $-1-\beta$; $-\alpha-\beta$; $-2\beta$; $-1-\gamma$; $-\alpha-\gamma$; $-\beta-\gamma$; $-2\gamma$; $-1-\delta$, $-\alpha-\delta$, etc. ſemper ſumma trium quadratorum exhiberi poteſt per numerum $p$ diuiſibilis.

## COROLL. 2.

87. Atque ſi $p$ ſit numerus primus, ſingulorum horum quadratorum radices $a$, $b$, $c$, cum ſint minores, quam $\frac{p}{2}$, erunt numeri ad $p$ primi, ideoque etiam ipſa quadrata, ac niſi ipſa haec tria quadrata fuerint prima inter ſe, ſed communem habeant diuiſorem quadratum, quia hic neceſſario eſt ad $p$ primus, per eum quadrata illa reducentur ad minora et prima inter ſe, quorum ſumma pariter per $p$ erit diuiſibilis.

## COROLL. 3.

88. Si in ſerie reſiduorum ſingulorum terminorum complementa ſimul inſint, tum etiam ſumma duorum quadra-

quadratorum aſſignari poteſt per numerum $p$ diuiſibilis. Quando autem duorum quadratorum ſumma datur, multo magis dabitur ſumma trium quadratorum, cum forma $aa + bb$ contineatur in forma $aa + bb + cc$.

## SCHOLION.

89. Simili modo demonſtratur, ſi in ſerie reſiduorum occurrat numerus, qui ſit complementum ſummae trium reſiduorum, tum ſummam quatuor quadratorum exhiberi poſſe, quae ſit per numerum $p$ diuiſibilis. Verum ſi ſummae binorum vel ternorum reſiduorum capiantur, tot prodeunt numeri diuerſi, vt ſatis manifeſtum videatur, eorum omnium complementa in ſerie non-reſiduorum contineri non poſſe.

## THEOREMA 18.

90. Propoſito quocunque numero primo $p$, ſi non duorum quadratorum inter ſe primorum ſumma per eum diuiſibilis exhiberi poteſt, certo ſemper ſumma trium quadratorum per eum diuiſibilis aſſignari poteſt, ita vt non ſingula ſeorſim per $p$ ſint diuiſibilia.

## DEMONSTRATIO.

Sit 1, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\epsilon$, etc. ſeries reſiduorum ex diuiſione quadratorum per numerum propoſitum primum $p$ orta. Iam in hac ſerie vel occurrit $-1$, vel non occurrit. Si $-1$ ibi occurrit, ſingulorum reſiduorum complementa ſimul ibi occurrunt, ideoque pluribus modis ſumma duorum quadratorum per $p$ diuiſibilis datur.

Sin autem $-1$ non in ſerie reſiduorum contineatur, in ſerie non-reſiduorum reperietur, vbi ſimul complementa omnium reſiduorum occurrent: hoc ergo caſu nulla dabitur ſumma duorum quadratorum per numerum $p$ diuiſibilis; niſi vtrumque ſeorſim diuiſorem admittat. Dari autem his caſibus ſummam trium quadratorum per numerum primum $p$ diuiſibilem ita oſtendo. Primo notetur, ſi quis numerus $r$ in ſerie reſiduorum occurrat, eius complementum $-r$ certo in ſerie non-reſiduorum eſſe, et viciſſim ſi $r$ ſit non-reſiduum, certo fore $-r$ reſiduum. Ponamus iam negari, vllam dari ſummam trium quadratorum per $p$ diuiſibilem; et quia in ſerie reſiduorum primo adeſt numerus 1, numerus $-2$ ibidem non occurret, (alias enim daretur ſumma trium quadratorum per $p$ diuiſibilis, contra hyp.) Occurret igitur $-2$ in ſerie non-reſiduorum, ac propterea numerus $+2$ in ſerie reſiduorum. Iam cum in ſerie reſiduorum habeantur numeri 1 et 2, ſummae eorum complementum $-3$, erit non-reſiduum, ideoque $+3$ reſiduum. Eodem modo ex reſiduis 1 et 3 concluditur fore $-4$ non-reſiduum ac proinde $+4$ reſiduum. Atque in genere ſi reſiduum quodcunque ſit $r$, debebit $-r-1$ eſſe non-reſiduum, hincque $1+r$ foret reſiduum. Ex hac ergo hypotheſi ſequitur, omnes plane numeros 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. in ſerie reſiduorum contineri, ſicque nullos plane numeros pro ſerie non-reſiduorum relinqui; quod cum ſit abſurdum, concludere debemus dari vtique trium quadratorum ſummam per numerum primum $p$ diuiſibilem, quorum quidem nullum ſeorſim ſit per $p$ diuiſibile. Quae ſi forte non fuerint prima inter ſe, per eorum

eorum maximum communem diuiſorem ad prima deprimi poterunt, quia maximus communis diuiſor quadratorum certo eſt quadratus.

## COROLL. 1.

91. Simili ratiocinio euincitur, multo magis repugnare, ſi quis negaret, dari quatuor quadratorum ſummam per numerum primum diuiſibilem. Ergo propoſito numero quocunque primo $p$ ſemper dabitur ſumma quatuor quadratorum per eum diuiſibilis.

## COROLL. 2.

92. Si numerus primus $p$ non ſit diuiſor vllius ſummae duorum quadratorum, tria illa quadrata $aa$, $bb$, $cc$, quorum ſumma $aa+bb+cc$ eſt per $p$ diuiſibilis, ſingula erunt minora, quam $\frac{1}{4}pp$. Hinc ergo erit $aa+bb+cc < \frac{3}{4}pp$, vnde quotus, qui ex diuiſione huius aggregati $aa+bb+cc$ per $p$ oritur, erit $< \frac{3}{4}p$.

## THEOREMA 19.

93. Si ſumma quatuor quadratorum per ſummam quatuor quadratorum diuidatur, quotus erit quoque ſumma quatuor quadratorum ſaltem in fractis.

## DEMONSTRATIO.

Sit $aa+bb+cc+dd$ ſumma quatuor quadratorum, quae diuidenda ſit per hanc ſummam quatuor quadratorum $pp+qq+rr+ss$, erit quotus $=\frac{aa+bb+cc+dd}{pp+qq+rr+ss}$, qui ſiue ſit numerus integer, ſiue fractus,

 ſemper

ſemper in quatuor quadrata ſaltem in fractis reſolui poteſt. Multiplicemus enim numeratorem et denominatorem per $pp+qq+rr+ss$, vt denominator fiat quadratus, erit quotus iſte $=\frac{(aa+bb+cc+dd)(pp+qq+rr+ss)}{(pp+qq+rr+ss)^2}$; quod ſi iam numerator in quatuor quadrata reſolui queat, ipſa fractio aequabitur aggregato quatuor quadratorum. At numerator pluribus modis in quatuor quadrata reſolui poteſt; ſi enim ponatur $(aa+bb+cc+dd)(pp+qq+rr+ss)=xx+yy+zz+vv$, erit

$$\left.\begin{aligned} x &= ap+bq+cr+ds \\ y &= aq-bp\pm cs\mp dr \\ z &= ar\mp bs-cp\pm dq \\ v &= as\pm br\mp cq-dp \end{aligned}\right\}$$

qui quatuor numeri, ſi ſinguli diuidantur per communem denominatorem $pp+qq+rr+ss$, dabunt radices quatuor quadratorum, quorum ſumma aequatur quoto propoſito.

Niſi igitur hi numeri $x$, $y$, $z$, et $v$ ſint diuiſibiles per $pp+qq+rr+ss$, ſaltem in fractis aſſignari poſſunt quatuor quadrata, quorum ſumma aequalis eſt quoto $\frac{aa+bb+cc+dd}{pp+qq+rr+ss}$.

## COROLL. 1.

94. Quae hic de quatuor quadratorum ſummis ſunt demonſtrata, etiam ad ſummas trium, vel etiam duorum patent, cum nihil impediat, quominus vnus, vel duo ex numeris $a$, $b$, $c$, $d$, et $p$, $q$, $r$, $s$ ſint aequales nihilo.

## COROLL. 2.

94. Si igitur ſumma trium quadratorum per ſummam quatuor, vel etiam trium quadratorum diuidatur, quotus certe erit ſumma quatuor quadratorum.

COROL.

## COROLL. 3.

95. Quia productum ex duabus ſummis quatuor quadratorum eſt quoque ſumma quatuor quadratorum, patet, ſi omnes numeri primi ſint ſummae quatuor quadratorum, vel etiam pauciorum, tum etiam omnes omnino numeros eſſe ſummas quatuor quadratorum, vel etiam pauciorum.

## SCHOLION.

96. Si ſumma quatuor quadratorum $aa + bb + cc + dd$ fuerit diuiſibilis per ſummam quatuor quadratorum $pp + qq + rr + ss$, tum quotum non ſolum in fractis, ſed etiam in integris, eſſe ſummam quatuor quadratorum, eſt theorema elegantiſſimum Fermatii, cuius demonſtratio cum ipſo nobis eſt erepta. Fateor, me adhuc hanc demonſtrationem inuenire non potuiſſe, verumtamen hinc via aperitur ad theorema ſequens demonſtrandum, quo quilibet numerus ſumma quatuor quadratorum, vel pauciorum aſſeritur; caſu ſcilicet, quo quadrata fracta non excluduntur: etſi enim hoc theorema in integris quoque ſemper verum ſit, tamen non parum mihi praeſtitiſſe videor, quod id ſemota quadratorum integrorum ratione demonſtrauerim. Cum enim demonſtratio adhuc poſt Fermatium ſit fruſtra indagata, me proxime ad hunc ſcopum pertigiſſe arbitror.

## THEOREMA 20.

97. Omnis numerus eſt ſumma quatuor quadratorum, vel etiam pauciorum, ſiquidem quadrata fracta non excludantur.

DEMON-

## DEMONSTRATIO.

Theorema hoc quidem verum eſt, etiamſi quadrata fracta excludantur; Fermatius enim affirmat, omnem numerum integrum eſſe aggregatum ex quatuor quadratis integris, vel etiam paucioribus, ego autem fateor, me hanc demonſtrationem nondum inuenire potuiſſe, dabo ergo demonſtrationem pro caſu, quo quadrata fracta non excluduntur. Iam notaui hanc demonſtrationem tantum ad numeros primos reduci, de quibus ergo ſufficit theorema demonſtraſſe. Quoniam igitur nouimus, numeros primos minores vt 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc. omnes in quatuor, vel pauciora quadrata reſolui poſſe, ſi quis id de ſequentibus neget, ei dicendum eſt, dari aliquem numerum primum minimum, qui non ſit ſumma quatuor pauciorumue quadratorum. Sit $p$ iſte numerus primus, ita vt omnes numeri primi ipſo minores, hincque etiam omnes compoſiti certo ſint ſummae quatuor pauciorumue quadratorum. Iam per theorema praecedens datur ſumma trium quadratorum, quae ſit $aa + bb + cc$ diuiſibilis per numerum iſtum $p$, ita vt ſingula haec quadrata ſint minora, quam $\frac{1}{4}pp$; vnde erit $aa + bb + cc < \frac{3}{4}pp$. Quotus ergo $\frac{aa + bb + cc}{p}$ erit minor, quam $\frac{3}{4}p$, qui cum idcirco minor ſit, quam $p$, certe erit ſumma quatuor pauciorumve quadratorum; ſit $xx + yy + zz + vv$ iſte quotus, erit $p = \frac{aa + bb + cc}{xx + yy + zz + vv}$, ideoque ipſe numerus $p$ erit ſumma quatuor pauciorumue quadratorum, quae in fractionibus etiam aſſignari poſſunt. Cum igitur inter numeros primos non detur minimus, qui in

quatuor

quatuor vel pauciora quadrata diſpertiri nequeat, nullus prorſus datur numerus primus, qui non eſſet aggregatum quatuor pauciorumue quadratorum, quod cum certum ſit de numeris primis, etiam valebit de omnibus numeris compoſitis, ideoque de omnibus omnino numeris, ita vt nullus omnino detur numerus, qui non ſit ſumma quatuor pauciorumue quadratorum.

## COROLL. 1.

98. Cum omnis numerus integer ſit ſumma quatuor pauciorumue quadratorum, eadem proprietas etiam ad omnes numeros fractos patet. Sit enim propoſita fractio quaecunque $\frac{m}{n}$, quae transformetur in $\frac{mn}{nn}$. Iam ſit $mn = \frac{aa}{pp} + \frac{bb}{qq} + \frac{cc}{rr} + \frac{dd}{ss}$, eritque $\frac{mn}{nn} = \frac{m}{n}$ $= \frac{aa}{npp} + \frac{bb}{nnqq} + \frac{cc}{nnrr} + \frac{dd}{nnss}$; ideoque omnis numerus fractus erit ſumma quatuor pauciorumue quadratorum.

## COROLL. 2.

99. Quoniam, ſi de reſolutione numerorum fractorum in quadrata, ſermo eſt, conditio illa quadratorum integrorum ſponte euaneſcit, theorema in latiori ſenſu ita acceptum, vt omnes plane numeros, ſiue integros, ſiue fractos, in quatuor vel pauciora quadrata reſolubiles dicamus, ſine vlla reſtrictione rigide demonſtraui.

## SCHOLION.

100. Cum igitur Fermatius affirmaſſet, omnem numerum integrum eſſe ſummam vel quatuor vel pau-

 ciorum

ciorum quadratorum integrorum: nunc quidem hoc eſt demonſtratum de quadratis in genere ſpectatis, fractis non excluſis. Quare vt Fermatio ſatisfiat, ſupereſt vt demonſtremus, qui numerus integer in quatuor quadrata fracta reſolui queat, eundem quoque in quatuor vel pauciora quadrata integra reſolui poſſe. In analyſi quidem Diophantaea pro certo aſſumi ſolet, nullum numerum integrum in quatuor quadrata fracta diſpertiri poſſe, niſi eius reſolutio in quatuor quadrata integra vel pauciora conſtet: quod ergo ſi demonſtratione eſſet confirmatum, nihil foret amplius deſiderandum. Verum nusquam adhuc eiusmodi demonſtrationem inueni. Quod autem ad theorema latiſſime patens attinet, his verbis conceptum:

*Omnem numerum ſiue integrum ſiue fractum eſſe ſummam quatuor pauciorumue quadratorum.*

eius demonſtrationem hic tradidi ita rigoroſam, vt in ea nihil plane deſiderari queat: hocque ipſo non contemnendam partem demonſtrationum Fermatianarum deperditarum mihi equidem videor reſtituiſſe.

OBSER-

# OBSERVATIO
## DE SVMMIS DIVISORVM.

*Auctore* L. EVLERO.

§. 1.

Propoſito quocunque numero $n$ denotet haec formula $\int n$ ſummam omnium diuiſorum numeri $n$. Ita cum vnitas praeter ſe ipſam alium non habeat diuiſorem, erit $\int 1 = 1$; atque cum numerus primus duos tantum habeat diuiſores, vnitatem et ſe ipſum, ſi $n$ fuerit numerus primus, erit $\int n = 1 + n$. Deinde cum numerus perfectus aequalis ſit ſummae ſuarum partium aliquotarum, partes aliquotae autem ſint diuiſores eius praeter ipſum numerum, manifeſtum eſt numeri perfecti ſummam diuiſorum ſe ipſo eſſe duplo maiorem, hinc ſi $n$ ſit numerus perfectus, erit $\int n = 2n$. Porro quoniam numerus redundans appellari ſolet is, cuius ſumma partium aliquotarum ipſo eſt maior, ſi $n$ ſit numerus redundans, erit $\int n > 2n$; ac ſi $n$ ſit numerus deficiens, ſeu talis, cuius ſumma partium aliquotarum ipſo eſt minor, erit $\int n < 2n$.

§. 2. Hoc igitur modo indoles numerorum, quatenus ſumma partium aliquotarum, vel diuiſorum, continetur, facile ſignis exprimitur. Si enim fuerit $\int n = 1 + n$, erit $n$ numerus primus, ſi ſit $\int n = 2n$ erit $n$ numerus perfectus, ac ſi ſit vel $\int n > 2n$, vel $\int n < 2n$, numerus $n$ erit vel redundans, vel deficiens. Huc etiam referri poteſt quaeſtio de numeris, qui amicabiles

vocari ſolent, quorum alter ſummae partium aliquotarum alterius aequatur. Si enim ſint $m$ et $n$ numeri amicabiles, cum numeri $m$ ſit ſumma partium aliquotarum $= \int m - m$, et numeri $n = \int n - n$, erit ex natura horum numerorum $n = \int m - m$ et $m = \int n - n$: ſicque habebitur $\int m = \int n = m + n$. Duo ergo numeri amicabiles eandem diuiſorum ſummam habent, quae ſimul ſummae amborum numerorum eſt aequalis.

§. 3. Quo ſumma diuiſorum cuiusque numeri propoſiti facilius inueniri poſſit, id commodiſſime fiet hunc numerum in duos factores, qui inter ſe ſint primi, reſoluendo. Si enim ſint $p$ et $q$ numeri inter ſe primi, ſeu qui praeter vnitatem nullum habeant diuiſorem communem, tum ſumma diuiſorum producti $pq$, aequale erit producto ex ſummis diuiſorum vtriusque ſeu erit $\int pq = \int p . \int q$. Hinc inuentis ſummis diuiſorum numerorum minorum, inuentio ſummae diuiſorum non difficulter ad numeros maiores extenditur.

§. 4. Si ſint $a$, $b$, $c$, $d$, etc. numeri primi, omnis numerus, quantuscunque fuerit, ſemper ad huiusmodi formam $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ etc. reducitur: qua forma inventa erit huius numeri ſumma diuiſorum ſeu

$\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ etc. $= \int a^\alpha . \int b^\beta . \int c^\gamma . \int d^\delta$. etc.

At ob $a, b, c, d,$ etc. numeros primos erit

$$\int a^\alpha = 1 + a + a^2 + \dots + a^\alpha = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}, \text{ ideoque}$$

$$\int a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \text{etc.} = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} . \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} . \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} . \frac{d^{\delta+1} - 1}{d - 1} . \text{ etc.}$$

Sufficiet ergo ſingularum poteſtatum numerorum primorum tantum ſummas diuiſorum inueniſſe.

§. 5.

§. 5. Hanc autem indagationem vlterius non perſequor, ſed, vt ad id, quod hic tractare inſtitui, propius accedam, numerorum ſecundum ordinem naturalem progredientium ſummas diuiſorum hic conſpectui exponam.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ∫ 1 = 1 | ∫ 26 = 42 | ∫ 51 = 72 | ∫ 76 = 140 |
| ∫ 2 = 3 | ∫ 27 = 40 | ∫ 52 = 98 | ∫ 77 = 96 |
| ∫ 3 = 4 | ∫ 28 = 56 | ∫ 53 = 54 | ∫ 78 = 168 |
| ∫ 4 = 7 | ∫ 29 = 30 | ∫ 54 = 120 | ∫ 79 = 80 |
| ∫ 5 = 6 | ∫ 30 = 72 | ∫ 55 = 72 | ∫ 80 = 186 |
| ∫ 6 = 12 | ∫ 31 = 32 | ∫ 56 = 120 | ∫ 81 = 121 |
| ∫ 7 = 8 | ∫ 32 = 63 | ∫ 57 = 80 | ∫ 82 = 126 |
| ∫ 8 = 15 | ∫ 33 = 48 | ∫ 58 = 90 | ∫ 83 = 84 |
| ∫ 9 = 13 | ∫ 34 = 54 | ∫ 59 = 60 | ∫ 84 = 224 |
| ∫ 10 = 18 | ∫ 35 = 48 | ∫ 60 = 168 | ∫ 85 = 108 |
| ∫ 11 = 12 | ∫ 36 = 91 | ∫ 61 = 62 | ∫ 86 = 132 |
| ∫ 12 = 28 | ∫ 37 = 38 | ∫ 62 = 96 | ∫ 87 = 120 |
| ∫ 13 = 14 | ∫ 38 = 60 | ∫ 63 = 104 | ∫ 88 = 180 |
| ∫ 14 = 24 | ∫ 39 = 56 | ∫ 64 = 127 | ∫ 89 = 90 |
| ∫ 15 = 24 | ∫ 40 = 90 | ∫ 65 = 84 | ∫ 90 = 234 |
| ∫ 16 = 31 | ∫ 41 = 42 | ∫ 66 = 144 | ∫ 91 = 112 |
| ∫ 17 = 18 | ∫ 42 = 96 | ∫ 67 = 68 | ∫ 92 = 168 |
| ∫ 18 = 39 | ∫ 43 = 44 | ∫ 68 = 126 | ∫ 93 = 128 |
| ∫ 19 = 20 | ∫ 44 = 84 | ∫ 69 = 96 | ∫ 94 = 144 |
| ∫ 20 = 42 | ∫ 45 = 78 | ∫ 70 = 144 | ∫ 95 = 120 |
| ∫ 21 = 32 | ∫ 46 = 72 | ∫ 71 = 72 | ∫ 96 = 252 |
| ∫ 22 = 36 | ∫ 47 = 48 | ∫ 72 = 195 | ∫ 97 = 98 |
| ∫ 23 = 24 | ∫ 48 = 124 | ∫ 73 = 74 | ∫ 98 = 171 |
| ∫ 24 = 60 | ∫ 49 = 57 | ∫ 74 = 114 | ∫ 99 = 156 |
| ∫ 25 = 31 | ∫ 50 = 93 | ∫ 75 = 124 | ∫ 100 = 217 |

§. 6. Si iam contemplemur ſeriem horum numerorum 1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28 etc. quam ſummae diuiſorum numeris naturali ordine procedentibus reſpondentes conſtituunt, non ſolum nulla lex progreſſionis patet, ſed ordo horum numerorum tantopere eſt perturbatus, vt nulli prorſus legi adſtrictus videatur. Quin etiam haec ſeries ordinem numerorum primorum manifeſto implicat, cum terminus indicis *n* ſeu $\int n$ toties ſit $= n + 1$, quoties *n* eſt numerus primus; conſtat autem, numeros primos nullo adhuc modo ad certam quandam progreſſionis legem reuocari potuiſſe. Cum autem noſtra ſeries non ſolum numerorum primorum, ſed etiam omnium reliquorum numerorum, quatenus ex primis ſunt compoſiti, rationem complectatur, eius lex multo etiam difficilior inuentu videtur, quam ipſius ſeriei numerorum primorum.

§. 7. Quae cum ita ſint, non parum equidem mihi ſcientiam numerorum promouiſſe videor, dum certam atque conſtantem legem detexi, ſecundum quam termini ſeriei propoſitae 1, 3, 4, 7, 6, etc. progrediantur, ita vt per hanc legem quilibet iſtius ſeriei terminus ex praecedentibus definiri poſſit, inueni enim, quod magis mirum videatur, hanc ſeriem ad id genus progreſſionum pertinere, quae recurrentes vocari ſolent; et quarum natura ita eſt comparata, vt quilibet terminus ex praecedentibus ſecundum certam quandam relationis rationem determinetur. Quis autem vnquam crediderit hanc ſeriem tantopore perturbatam, et quae cum ſeriebus recurrentibus nihil plane commune habere

videtur,

videtur, nihilominus in hoc ſerierum genere contineri eiusque ſcalam relationis aſſignari poſſe?

§. 8. Cum huius ſeriei terminus indici $n$ reſpondens, qui indicat ſummam diuiſorum numeri $n$ ſit $= \int n$, eius termini antecedentes ordine retrogrado erunt $\int(n-1)$, $\int(n-2)$, $\int(n-3)$, $\int(n-4)$, $\int(n-5)$ etc. Quilibet autem terminus iſtius ſeriei ſcilicet $\int n$ ita ex aliquot antecedentium conflatur, vt ſit:

$$\begin{aligned} \int n = & \int(n-1)+\int(n-2)-\int(n-5)-\int(n-7)+\int(n-12)+\int(n-15) \\ & -\int(n-22)-\int(n-26)+\int(n-35)+\int(n-40)-\int(n-51)-\int(n-57) \\ & +\int(n-70)+\int(n-77)-\int(n-92)-\int(n-100)+\int(n-117)+\int(n-126)-\text{etc.} \end{aligned}$$

Vel cum ſigna + et − alternatim binos terminos afficiant, haec ſeries commode in duas diuellitur, hoc modo:

$$\int n = \begin{cases} \int(n-1)-\int(n-5)+\int(n-12)-\int(n-22)+\int(n-35)-\int(n-51)+\text{etc.} \\ \int(n-2)-\int(n-7)+\int(n-15)-\int(n-26)+\int(n-40)-\int(n-57)+\text{etc.} \end{cases}$$

§. 9. Ex hac poſteriori forma ordo numerorum, qui in vtraque ſerie ſucceſſiue a numero $n$ ſubtrahuntur, facile perſpicitur, vtraque enim ſeries eſt ſecundi ordinis, differentias ſecundas habens conſtantes. Namque prioris ſeriei numeri cum ſuis differentiis tam primis, quam ſecundis, ſunt:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1, | 5, | 12, | 22, | 35, | 51, | 70, | 92, | 117, | etc. |
| diff. 1. | | 4, | 7, | 10, | 13, | 16, | 19, | 22, | 25, | etc. |
| diff. 2. | | | 3, | 3, | 3, | 3, | 3, | 3, | 3, | etc. |

Vnde illius ſeriei terminus generalis eſt $= \frac{3xx-x}{2}$, continetque adeo omnes numeros pentagonales. Altera ſeries eſt

2, 7,

2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126, etc:
diff. 1: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26 etc.
diff. 2: 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, etc.
ideoque terminum generalem habet $\frac{3xx+x}{2}$, ac ſeriem numerorum pentagonalium retro continuatam continet.

§. 10. Omnino hic notatu eſt dignum, ſeriem numerorum pentagonalium tam ipſam, quam retro continuatam, ad ordinem ſeriei ſummarum diuiſorum potiſſimum adhiberi, cum ſane nullum nexum inter numeros pentagonales et ſummas diuiſorum ne ſuſpicari quidem liceat. Si enim ſeries numerorum pentagonalium tam antrorſum, quam retrorſum, continuata exponatur hoc modo:

etc. 77, 57, 40, 26, 15, 7, 2, 0, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, etc.

formula noſtra ordinem ſummarum diuiſorum complectens ſignis alternantibus hoc modo ordinata exhibere poterit:

$$\text{etc.} - \int(n-15) + \int(n-7) - \int(n-2) + \int(n-0) - \int(n-1) + \int(n-5) - \int(n-12) + \int(n-22) - \text{etc.} = 0$$

quae ſeries vtrinque quidem in infinitum excurrit, ſed quouis caſu, ſiquidem ad vſum noſtrum rite adhibeatur, determinato terminorum numero conſtat.

§. 11. Si enim ope formulae noſtrae primum exhibitae

$$\begin{aligned} \int n = {} & \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) \\ & - \int(n-22) - \int(n-26) + \int(n-35) + \int(n-40) - \int(n-51) - \int(n-57) \\ & + \int(n-70) + \int(n-77) - \int(n-92) - \int(n-100) + \text{etc.} \end{aligned}$$

Summam diuiſorum numeri $n$ inuenire velimus ex cognitis diuiſorum ſummis numerorum minorum, plures termi-

terminos huius formulae accipere non oportet, quam quoad ad ſummas diuiſorum numerorum negatiuorum perueniatur. Omnes ſcilicet termini, qui poſt ſignum $\int$ numeros negatiuos continent, ſunt reiiciendi; vnde patet ſi $n$ ſit numerus exiguus, pauciſſimos terminos ſufficere, quo maior autem fuerit numerus $n$, eo plures terminos ex formula noſtra generali ad vſum adhiberi debere.

§. 12. Summa igitur diuiſorum numeri propoſiti $n$ ex ſummis diuiſorum aliquot numerorum minorum, quas cognitas eſſe aſſumo, conflatur; quoniam quouis caſu ſummae numerorum negatiuorum reiiciuntur. Quae cautio cum eo ſit facilior, quod numerorum negatiuorum ſumma diuiſorum ne concipi quidem poſſit, inſuper moneri oportet, quomodo operatio ſit dirigenda iis caſibus, quibus formula noſtra praebet terminum $\int(n-n)$ ſeu $\int o$, qui cum cyphra per omnes numeros ſit diuiſibilis, vel infinitus vel indeterminatus videtur. Caſus hic autem toties occurrit, quoties $n$ eſt numerus ex ſerie numerorum pentagonalium vel ipſa, vel retro continuata; his igitur caſibus tenendum eſt, ſemper pro termino $\int(n-n)$ ſeu $\int o$ ipſum illum numerum $n$, qui proponitur, eſſe ſcribendum, et quidem cum eo ſigno, quo terminus $(n-n)$ in formula noſtra afficitur.

§. 13. His expoſitis praeceptis, quae ad vſum formulae noſtrae obſeruari debent, exempla a numeris minimis inchoando apponam, quo facilius vis formulae noſtrae perſpiciatur, ſimulque eius veritas agnoſcatur.

$\int 1$

$\int 1 = \int 0$ ſeu
$\int 1 = 1 = 1$

$\int 2 = \int 1 + \int 0$ ſeu
$\int 2 = 1 + 2 = 3$

$\int 3 = \int 2 + \int 1$ ſeu
$\int 3 = 3 + 1 = 4$

$\int 4 = \int 3 + \int 2$ ſeu
$\int 4 = 4 + 3 = 7$

$\int 5 = \int 4 + \int 3 - \int 0$ ſeu
$\int 5 = 7 + 4 - 5 = 6$

$\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1$ ſeu
$\int 6 = 6 + 7 - 1 = 12$

$\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - \int 0$ ſeu
$\int 7 = 12 + 6 - 3 - 7 = 8$

$\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1$ ſeu
$\int 8 = 8 + 12 - 4 - 1 = 15$

$\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2$ ſeu
$\int 9 = 15 + 8 - 7 - 3 = 13$

$\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3$ ſeu
$\int 10 = 13 + 15 - 6 - 4 = 18$

$\int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4$ ſeu
$\int 11 = 18 + 13 - 12 - 7 = 12$

$\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0$ ſeu
$\int 12 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28$

§. 14. Exempla haec attentius inſpicienti, atque etiam ad numeros maiores progredienti, non ſine admiratione patebit, quemadmodum ſemper quaſi praeter expecta-

expectationem ad veram diuiſorum ſummam numeri propoſiti perueniatur; et quo hic conſenſus facilius deprehendatur, ſupra iam omnium numerorum centenario non maiorum ſummas diuiſorum exhibui; vnde veritas noſtrae formulae in numeris maioribus explorari poterit. Imprimis autem non ſine delectatione reperiemus, quoties numerus propoſitus fuerit primus, ex formula noſtra pro eius diuiſorum ſumma inueniri numerum vnitate maiorem. Euoluamus in hunc finem exemplum, quo numerus propoſitus $n = 101$, quaſi ignorantes exploraturi, vtrum hic numerus ſit primus nec ne? atque operatio ita conſtabit:

$$\int 101 = \int 100 + \int 99 - \int 96 - \int 94 + \int 89 + \int 86 - \int 79 - \int 75$$
$$217 + 156 - 252 - 144 + 90 + 132 - 80 - 124$$
$$+ \int 66 + \int 61 - \int 50 - \int 44 + \int 31 + \int 24 - \int 9 - \int 1$$
$$+ 144 + 62 - 93 - 84 + 32 + 60 - 13 - 1$$

Colligendis ergo binis terminis erit

$$\begin{aligned} \int 101 = & + 373 - 396 \\ & + 222 - 204 \\ & + 206 - 177 \\ & + 92 - 14 \end{aligned}$$

$$\text{ſeu } \int 101 = + 893 - 791 = 102$$

Reperitur ergo ſumma diuiſorum numeri 101 vnitate maior ſcilicet 102, vnde, etiamſi id aliunde non conſtaret, ſequitur manifeſto, numerum 101 eſſe primum. Hoc autem merito eo mirabilius videtur, cum nulla operatio ſit inſtituta, quae ad rationem diuiſorum vllo modo referri queat; quin etiam diuiſores, quorum ſumma

per hanc regulam reperitur, ipſi manent incogniti, etiamſi ſaepe ex conſideratione ipſius ſummae concludi poſſint.

§. 15. Inſignis haec proprietas, qua ſummae diuiſorum ſunt praeditae, non minus foret memorabilis, etiamſi eius demonſtratio eſſet obuia et quaſi in aprico poſita. Sin autem demonſtratio admodum eſſet abſtruſa, atque numerorum proprietatibus maxime reconditis inniteretur, inde non mediocriter certe pretium huius legis progreſſionis repertae augeretur, ſiquidem earum veritatum inueſtigatio eo magis eſt laudanda, quo magis eae fuerint abſconditae. Verum dum fateri cogor, me non ſolum nullam huius veritatis demonſtrationem proferre poſſe, ſed etiam propemodum pro deſperato habere, neſcio an non ob hanc ipſam cauſam cognitio talis veritatis multo magis ſit aeſtimanda, cuius demonſtratio nobis eſt imperſcrutabilis. Atque hanc ob rem iſtam veritatem pluribus exemplis confirmare viſum eſt, quod mihi quidem eius demonſtrationem exhibere non liceat.

§. 16. Eximium igitur hic eiusmodi propoſitionum habemus exemplum, de quarum veritate nullo modo dubitare poſſumus, etiamſi eas demonſtrare non valeamus, quod pleriſque eo magis mirum videbitur, quod in matheſi vulgo nullae aliae propoſitiones admitti putantur, niſi quarum veritas ex indubitatis principiis euinci queat. Interim tamen non fortuito et quaſi diuinando ad cognitionem huius veritatis perueni; cui enim in mentem venire potuiſſet, ordinem, qui forte in ſummis diuiſorum locum habuerit, ex natura ſerierum

recur-

recurrentium ac numerorum pentagonalium per ſolam coniecturam elicere velle? Hanc ob rem non abs re forè arbitror, ſi modum, quo ad cognitionem huius ordinis pertigerim, dilucide expoſuero, praeſertim cum is admodum ſit reconditus ac longe multasque per ambages conquiſitus.

§. 17. Deductus autem ſum ad hanc obſeruationem per conſiderationem iſtius formulae infinitae

$$s=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\text{ etc.}$$

cuius valorem, ſi multiplicatione ſingulorum factorum actu inſtituta euoluatur, ac ſecundum poteſtates ipſius $x$ diſponatur, deprehendi in ſequentem ſeriem conuerti:

$$s=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+x^{57}-\text{etc.}$$

vbi in exponentibus ipſius $x$ iidem numeri occurrunt quos ſupra deſcripſi, numeri ſcilicet pentagonales cum ipſi, tum retro continuati. Vnde, quo ordo facilius perſpiciatur, haec ſeries ita exhiberi poterit, vt vtrinque in infinitum excurrat:

$$s=\text{etc.}+x^{26}-x^{15}+x^7-x^2+x^0-x^1+x^5-x^{12}+x^{22}-x^{35}+x^{51}-\text{etc.}$$

§. 18. Aequalitas harum duarum formularum pro $s$ exhibitarum iam eſt id ipſum, quod ſolida demonſtratione confirmare non poſſum; verum tamen, qui opus euolutionis formulae prioris $s=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. in ſe ſuſcipere, hosque factores ſucceſſiue in ſe multiplicare voluerit, ſtatim ad terminos primores alterius ſeriei $s=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+$ etc. perueniet, neque difficulter perſpiciet, bina ſigna $+$ et $-$ geminata ſe inuicem excipere, et exponentes poteſtatum ipſius $x$ eam legem ſequi, quam iam ſatis expoſui.

 Con-

Conceſſa autem hac aequalitate inter binas iſtas formulas infinitas proprietas ſummarum diuiſorum, quam ante indicaui, rigide inde demonſtrari poteſt; atque viciſſim ſi haec proprietas pro vera agnoſcatur, ex ea veritas conſenſus duarum harum formularum euincetur.

§. 19. Quodſi enim pro demonſtrato aſſumamus, poſito $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. fore $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} -$ etc. erit logarithmis ſumendis

$$ls = l(1-x) + l(1-x^2) + l(1-x^3) + l(1-x^4) + l(1-x^5) + \text{etc.}$$

$$\text{et } ls = l(1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.})$$

Sumantur vtriusque formae differentialia, eritque

$$\frac{ds}{s} = \frac{-dx}{1-x} - \frac{2xdx}{1-xx} - \frac{3xxdx}{1-x^3} - \frac{4x^3dx}{1-x^4} - \frac{5x^4dx}{1-x^5} \text{ etc.}$$

$$\text{et } \frac{ds}{s} = \frac{-dx - 2xdx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}}$$

Multiplicetur vtraque per $\frac{-x}{dx}$, vt habeatur

$$\text{I. } -\frac{xds}{sdx} = \frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-xx} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \text{etc.}$$

$$\text{II. } -\frac{xds}{sdx} = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}}$$

§. 20. Harum expreſſionum inter ſe aequalium contemplemur primo priorem, ac ſingulos terminos more conſueto in progreſſiones geometricas conuertamus; quo facto prodibit, infinitas has progreſſiones geometricas ſecundum poteſtates ipſius $x$ diſponendo:

$- xds$

$$\begin{array}{rcccccccccccccl}
-\frac{xds}{sdx}= & x^1 & +x^2 & +x^3 & +x^4 & +x^5 & +x^6 & +x^7 & +x^8 & +x^9 & +x^{10} & +x^{11} & +x^{12} & \text{etc.} \\
 & & +2 & \cdot & +2 & \cdot & +2 & \cdot & +2 & \cdot & +2 & \cdot & +2 & \\
 & & & +3 & \cdot & \cdot & +3 & \cdot & \cdot & +3 & \cdot & \cdot & +3 & \\
 & & & & +4 & \cdot & \cdot & \cdot & +4 & \cdot & \cdot & \cdot & +4 & \\
 & & & & & +5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +5 & \cdot & \cdot & \\
 & & & & & & +6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & +6 & \\
 & & & & & & & +7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & & & & & & +8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & & & & & & & +9 & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & & & & & & & & +10 & \cdot & \cdot & \\
 & & & & & & & & & & & +11 & \cdot & \\
 & & & & & & & & & & & & +12 &
\end{array}$$

§. 21. Si iam ſingularum poteſtatum ipſius $x$ coefficientes colligantur, habebitur:

$$-\frac{xds}{sdx} = x^1 + x^2(1+2) + x^3(1+3) + x^4(1+2+4) + x^5(1+5) + x^6(1+2+3+6) \text{ etc.}$$

vbi manifeſtum eſt, cuiusque poteſtatis ipſius $x$ coefficientem eſſe aggregatum omnium numerorum, per quos exponens illius poteſtatis eſt diuiſibilis. Scilicet poteſtatis $x^n$ coefficiens erit ſumma omnium diuiſorum numeri $n$, erit ergo is ſecundum modum ſignandi ſupra receptum $= \int n$. Hinc itaque ſeriei ipſi $-\frac{xds}{sdx}$ aequalis inuenta ita exhibebitur, vt ſit

$$-\frac{xds}{sdx} = x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + x^7\int 7 + \text{etc.}$$

ſicque poſito $x = 1$ prodit progreſſio ſummarum diuiſorum, qui ſingulis numeris ordine naturali progredientibus conueniunt.

§. 22.

§. 22. Deſignemus iam hanc ſeriem per $t$ vt ſit

$$t = x^1\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + x^7\int 7 + \text{etc.}$$

et ob $t = -\frac{x\,ds}{s\,dx}$ erit quoque

$$t = \frac{x^1 + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}}$$

Neceſſe igitur eſt, vt ex euolutione huius fractionis pro $t$ ſeries obtineatur aequalis illi, quam prior forma ſuppeditauit: vnde manifeſtum eſt, ſeriem illam pro $t$ inuentam eſſe recurrentem, cuius ſinguli termini per praecedentes determinentur, ſecundum ſcalam relationis, quam denominator $1 - x - x^2 + x^5 + x^7$ etc. indicat.

§. 23. Quo nunc facilius indoles huius ſeriei recurrentis cognoſcatur, binos iſtos valores pro $t$ inuentos inter ſe coaequemus, atque ad fractionem tollendam vterque per denominatorem $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.}$ multiplicetur, quo facto orietur terminis ſecundum poteſtates ipſius $x$ diſponendis:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x^1\int 1 + & x^2\int 2 + & x^3\int 3 + & x^4\int 4 + & x^5\int 5 + & x^6\int 6 + & x^7\int 7 + & x^8\int 8 + & x^9\int 9 + & x^{10}\int 10 + & x^{11}\int 11 + & x^{12}\int 12 \text{ etc.} \\
 & -\int 1 - & \int 2 - & \int 3 - & \int 4 - & \int 5 - & \int 6 - & \int 7 - & \int 8 - & \int 9 - & \int 10 - & \int 11 \\
 & & -\int 1 - & \int 2 - & \int 3 - & \int 4 - & \int 5 - & \int 6 - & \int 7 - & \int 8 - & \int 9 - & \int 10 \\
 & & & & & +\int 1 + & \int 2 + & \int 3 + & \int 4 + & \int 5 + & \int 6 + & \int 7 \\
 & & & & & & & +\int 1 + & \int 2 + & \int 3 + & \int 4 + & \int 5 \\
 & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & \text{aequale} & & & & & & & & \vdots \\
x^1 + & 2x^2 & * & * & -5x^5 & * & -7x^7 & * & * & * & * & +12x^{12} \text{ etc.}
\end{array}$$

§. 24. Cum iam ſingularum poteſtatum ipſius $x$ coefficientes ſe mutuo deſtruere debeant, hinc ſequentes eliciemus aequalitates:

$\int 1 = 1$

$$\begin{aligned}
\int 1 &= 1 \\
\int 2 &= \int 1 + 2 \\
\int 3 &= \int 2 + \int 1 \\
\int 4 &= \int 3 + \int 2 \\
\int 5 &= \int 4 + \int 3 - 5 \\
\int 6 &= \int 5 + \int 4 - \int 1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\int 7 &= \int 6 + \int 5 - \int 2 - 7 \\
\int 8 &= \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 \\
\int 9 &= \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 \\
\int 10 &= \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 \\
\int 11 &= \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4 \\
\int 12 &= \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + 12
\end{aligned}$$

etc.

quae manifeſto redeunt ad iſtas:

$$\begin{aligned}
\int 1 &= 1 \\
\int 2 &= \int(2-1) + 2 \\
\int 3 &= \int(3-1) + \int(3-2) \\
\int 4 &= \int(4-1) + \int(4-2) \\
\int 5 &= \int(5-1) + \int(5-2) - 5 \\
\int 6 &= \int(6-1) + \int(6-2) - \int(6-5)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\int 7 &= \int(7-1) + \int(7-2) - \int(7-5) - 7 \\
\int 8 &= \int(8-1) + \int(8-2) - \int(8-5) - \int(8-7) \\
\int 9 &= \int(9-1) + \int(9-2) - \int(9-5) - \int(9-7) \\
\int 10 &= \int(10-1) + \int(10-2) - \int(10-5) - \int(10-7) \\
\int 11 &= \int(11-1) + \int(11-2) - \int(11-5) - \int(11-7) \\
\int 12 &= \int(12-1) + \int(12-2) - \int(12-5) - \int(12-7) + 12
\end{aligned}$$

§. 25. Hic perſpicuum eſt, numeros, qui continuo a numero propoſito, cuius diuiſorum ſumma quaeritur, ſubtrahi debent, eſſe ipſos numeros ſeriei 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, etc. ex quibus tot quouis caſu ſunt ſumendi, quoad numerum propoſitum non excedant: atque etiam ſigna eam tenere rationem, quae ſupra eſt deſcripta. Hinc ergo propoſito numero quocunque $n$ manifeſtum eſt, fore

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \text{etc.}$$

hos terminos eouſque continuando, donec numeri ſignum $\int$ praefixum habentes, fiant negatiui. Simul ergo ex origine ſeriei huius recurrentis ratio patet, cur iſta progreſſio quouis caſu vlterius continuari non debeat.

§. 26. Quod porro ad numeros abſolutos attinet, qui in formularum inuentarum aliquibus ſub finem annectuntur, manifeſtum eſt, eos ex numeratore fractionis, qua valor ipſius $t$ expreſſus eſt inuentus (§. 22) oriri, atque iis tantum caſibus legem continuitatis interrumpere, quibus numerus $n$ eſt terminus huius ſeriei 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26 etc. quanquam ne hoc

quidem caſu lex ſignorum perturbatur. His autem caſibus numerus abſolutus inſuper cum ſigno ſuo adiiciendus ipſi numero propoſito eſt aequalis; atque ſi legem ante deſcriptam conſideremus, hunc numerum vtique deprehendemus reſpondere termino $\int(n-n)$: vnde ratio patet, cur quoties in applicatione formae

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \text{etc.}$$

peruenitur ad terminum $\int(n-n)$, is non omitti, ſed pro eius valore ipſe numerus $n$ ſcribi debeat. Hinc igitur regula ſupra expoſita in omnibus partibus confirmatur.

---

---

---

DEMON-

# DEMONSTRATIO

## THEOREMATIS CIRCA ORDINEM IN *SVMMIS* DIVISORVM OBSERVATVM.

AVCT. *L. EVLERO.*

Iam ab aliquo tempore incidi in theorema, quo natura numerorum non mediocriter illuſtrari eſt viſa, cum in eo ordo contineatur, quem ſummae diuiſorum, ex numeris ſerie naturali procedentibus ortae, inter ſe tenent. Oſtendi enim, ſi ſingulorum numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc. omnes diuiſores in vnam ſummam colligantur, haeque diuiſorum ſummae in ſeriem diſponantur, quae erit

1, 3, 4, 7, 6, 12, 8, 15, 13, 18, 12, 28, 14, 24, 24, 31, 18 etc.

hanc ſeriem eſſe recurrentem, eiusque ſingulos terminos ex praecedentibus ſecundum quandam ſcalam relationis determinari. Atque hic ordo non ſolum ideo maxime notatu dignus eſt viſus, quod vix quisquam ſuſpicatus fuerit, hanc ſeriem certae cuipiam legi eſſe adſtrictam, ſed etiam, quod iſtius ordinis nullam demonſtrationem firmam mihi quidem tum temporis reperire licuerit, etiamſi pluribus modis rem tentauerim. Perductus quidem fui ad huius ordinis obſeruationem, dum ſequentem formulam in infinitum productam ſum contemplatus:

$$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ etc.}$$

ex cuius euolutione per inductionem concluſi, fore

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \text{ etc.}$$

vbi exponentium ipſius $x$ ordo eorum differentiis ſumendis fit manifeſtus; erit enim ſeries differentiarum

1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, 5, 11, 6, 13, 7, 15, 8, etc.

Excerptis enim terminis alternis patet, hanc ſeriem eſſe permixtam ex ſerie numerorum imparium, et ex ſerie numerorum omnium integrorum. Verum quod ſit ſecundum hanc legem: $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} +$ etc. ſiquidem fuerit $s = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. per inductionem tantum collegi, neque aequalitatem harum duarum formularum ſolida demonſtratione euincere potui. Quam ob cauſam etiam ordinem illum, quem in ſummis diuiſorum hinc elicui, firmiter demonſtrare non valui; ſed eius demonſtrationem iam tum inniti declaraui demonſtrationi aequalitatis inter binas illas formulas infinitas modo exhibitas. Cum igitur nunc iſtam demonſtrationem ſim adeptus, ordinem quoque illum in ſummis diuiſorum detectum non amplius illis veritatibus, quae agnoſcuntur, neque tamen demonſtrari poſſunt, acceſeri conueniet, quemadmodum tum temporis ſum arbitratus, ſed iam merito ipſi locus inter veritates rigide demonſtratas aſſignari poterit. Cuius rei ne vllum dubium relinquatur, ſingulas propoſitiones, quibus demonſtratio huius veritatis innititur, hic ordine apponam atque demonſtrabo:

## PROPOSITIO I.

Si ſit $s = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\epsilon)(1+\zeta)(1+\eta)$ etc. productum hoc, ex infinitis factoribus conſtans, in ſeriem ſequentem conuertitur:

$$s = (1+\alpha) + \beta(1+\alpha) + \gamma(1+\alpha)(1+\beta) + \delta(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$$
$$+ \epsilon(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta) + \zeta(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\epsilon) + \text{etc.}$$

DEMON-

## DEMONSTRATIO.

Cum enim ſeriei primus terminus ſit $(1+\alpha)$ et ſecundus $= \beta(1+\alpha)$, erit ſumma primi et ſecundi $= (1+\alpha)(1+\beta)$: ſi iam addatur tertius terminus $\gamma(1+\alpha)(1+\beta)$, prodibit $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$: addatur inſuper terminus quartus, qui eſt $\delta(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)$, erit ſumma $= (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)$. Atque ſic in infinitum procedendo, ſumma totius ſeriei, ſeu omnium eius terminorum, perducetur ad hoc productum: $(1+\alpha)(1+\beta,)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon)(1+\zeta)$ etc. Vnde manifeſtum eſt, ſi fuerit

$$s = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma(1+\delta)(1+\varepsilon)(1+\zeta) \text{ etc.}$$

fore viciſſim:

$$s = (1+\alpha) + \beta(1+\alpha) + \gamma(1+\alpha)(1+\beta) + \delta(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) + \text{etc.}$$

## PROPOSITIO II.

Si fuerit $s = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ etc. productum hoc, ex infinitis factoribus conſtans, reducetur ad hanc ſeriem:

$$s = 1-x-xx(1-x)-x^3(1-x)(1-x^2)-x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) \text{ etc.}$$

## DEMONSTRATIO.

Si haec forma $s = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. cum forma praecedente $s = (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon)$ etc. comparetur, manifeſtum eſt fore: $\alpha = -x$; $\beta = -x^2$; $\gamma = -x^3$; $\delta = -x^4$; $\varepsilon = -x^5$; etc. His igitur valoribus in ſerie ibi data, quae producto $s$ aequalis eſt inuenta, rite ſubſtitutis, patebit propoſitionis veritas, ſcilicet eſſe:

$$s = 1-x-xx(1-x)-x^3(1-x)(1-x^2)-x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3)- \text{etc.}$$

 PROPO-

## PROPOSITIO III.

Si fuerit $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$ etc. erit hoc productum infinitum per multiplicationem euoluendo, terminosque ſecundum poteſtates ipſius $x$ diſponendo:

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + x^{57} - \text{etc.}$$

cuius ſeriei ratio eſt ea ipſa, quae ſupra eſt expoſita.

## DEMONSTRATIO.

Cum ſit $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)$ etc. erit $s = 1 - x - xx(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) - x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + \text{etc.}$

Ponatur $s = 1 - x - Axx$, erit:

$$A = 1 - x + x(1-x)(1-xx) + x^2(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + \text{etc.}$$

Euoluantur ſinguli termini tantum ſecundum factorem $1-x$, ac ſequenti modo diſponantur:

$$A = \begin{array}{l} \qquad -x \qquad\qquad -x^2(1-xx) \qquad\qquad -x^3(1-x^2)(1-x^3) \qquad\qquad -\text{etc.} \\ +1 + x(1-xx) + x^2(1-x^2)(1-x^3) + x^3(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) + \text{etc.} \end{array}$$

eritque terminis ſubſcriptis colligendis:

$$A = 1 - x^3 - x^5(1-x^2) - x^7(1-x^2)(1-x^3) - x^9(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) - \text{etc.}$$

Ponatur $A = 1 - x^3 - Bx^5$, erit

$$B = 1 - x^2 + x^2(1-x^2)(1-x^3) + x^4(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) + \text{etc.}$$

in quibus terminis ſubſcriptis $1 - x^2$ tantum euoluatur, ac fiet

$$B = \begin{array}{l} \quad -x^2 \qquad\qquad -x^4(1-x^3) \qquad\qquad -x^6(1-x^3)(1-x^4) \\ 1 + x^2(1-x^3) + x^4(1-x^3)(1-x^4) + x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) \end{array}$$

denuoque terminis ſubſcriptis colligendis habebitur:

$$B = 1 - x^5 - x^8(1-x^3) - x^{11}(1-x^3)(1-x^4) - x^{14}(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) - \text{etc}$$

Ponatur $B = 1 - x^5 - Cx^8$, erit

$$C = 1 - x^3 + x^3(1-x^3)(1-x^4) + x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \text{etc.}$$

vbi in ſingulis terminis factor $1 - x^3$ euoluatur, vt fiat ſcribendo vt ſupra:

C =

$$C = \begin{array}{l} \quad -x^{3} \quad\quad -x^{6}(1-x^{4}) \quad\quad -x^{9}(1-x^{4})(1-x^{5}) \quad - \text{etc.} \\ 1 + x^{3}(1-x^{4}) + x^{6}(1-x^{4})(1-x^{5}) + x^{9}(1-x^{4})(1-x^{5})(1-x^{6}) + \text{etc.} \end{array}$$

vnde colligetur:

$$C = 1 - x^{7} - x^{11}(1-x^{4}) - x^{15}(1-x^{4})(1-x^{5}) - x^{19}(1-x^{4})(1-x^{5})(1-x^{6}) - \text{etc.}$$

Ponatur $C = 1 - x^{7} - D x^{11}$, erit

$$D = 1 - x^{4} + x^{4}(1-x^{4})(1-x^{5}) + x^{8}(1-x^{4})(1-x^{5})(1-x^{6}) + \text{etc.}$$

quae abit in hanc formam:

$$D = \begin{array}{l} \quad -x^{4} \quad\quad -x^{8}(1-x^{5}) \quad\quad -x^{12}(1-x^{5})(1-x^{6}) \quad - \text{etc.} \\ 1 + x^{4}(1-x^{5}) + x^{8}(1-x^{5})(1-x^{6}) + x^{12}(1-x^{5})(1-x^{6})(1-x^{7}) + \text{etc.} \end{array}$$

ſicque erit

$$D = 1 - x^{9} - x^{14}(1-x^{5}) + x^{19}(1-x^{5})(1-x^{6}) - x^{24}(1-x^{5})(1-x^{6})(1-x^{7}) - \text{etc.}$$

Quodſi porro ponatur $D = 1 - x^{9} - Ex^{14}$, reperietur ſimili modo:

$E = 1 - x^{11} - Fx^{17}$; hincque vltra:

$F = 1 - x^{17} - Gx^{20}$; $G = 1 - x^{15} - Hx^{23}$; $H = 1 - x^{17} - Ix^{26}$;

etc.

Reſtituamus iam ſucceſſiue hos valores, eritque:

$$\begin{aligned} s &= 1 - x - Axx \\ Ax^{2} &= x^{2}(1-x^{3}) - Bx^{7} \\ Bx^{7} &= x^{7}(1-x^{5}) - Cx^{15} \\ Cx^{15} &= x^{15}(1-x^{7}) - Dx^{26} \\ Dx^{26} &= x^{26}(1-x^{9}) - Ex^{40} \end{aligned}$$

etc.

Quamobrem habebimus:

$$s = 1 - x - x^{2}(1-x^{3}) + x^{7}(1-x^{5}) - x^{15}(1-x^{7}) + x^{26}(1-x^{9}) - x^{40}(1-x^{11}) + \text{etc.}$$

ſiue id ipſum, quod demonſtrari oportet:

$$s = 1 - x - x^{2} + x^{5} + x^{7} - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} + \text{etc.}$$

vnde ſimul lex exponentium ſupra indicata per differentias luculente perſpicitur.

PRO-

## PROPOSITIO IV.

### SEV

## THEOREMA PRINCIPALE DEMONSTRANDVM.

Si haec ſcribendi formula $\int n$ denotet ſummam omnium diuiſorum numeri $n$, ſimilique modo numerorum minorum, veluti $n-\alpha$, deſignentur per $\int(n-\alpha)$, ſumma diuiſorum numeri $n$, ſeu $\int n$, ita pendebit a ſummis diuiſorum numerorum minorum, vt ſit

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) - \int(n-26) + \int(n-35) + \int(n-40) - \int(n-51) - \int(n-57) \text{ etc.}$$

Vbi ſequentia ſunt notanda:

1°. Signa + et − geminata terminos huius progreſſionis alternatim afficere.

2°. Legem numerorum 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, etc. ex eorum differentiis, quae ſunt 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, etc. fieri manifeſtam; vnde colligitur hos numeros omnes in formula hac generali $\frac{3zz \pm z}{2}$ contineri.

3°. Quouis caſu iſtius progreſſionis eos tantum terminos ab initio eſſe accipiendos, qui poſt ſignum $\int$ numeros affirmatiuos retineant; reliquos vero omnes, quibus ſignum $\int$ numeris negatiuis praefigitur, eſſe omittendos; ita ſi ſit $n = 10$, erit $\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 = 13 + 15 - 6 - 4 = 18$.

4°. Quibus caſibus occurrit terminus $\int(n-n)$, quod euenit, ſi $n$ fuerit numerus huius ſeriei 1, 2, 5, 7, 12, 15 etc. iis caſibus pro valore huius termini $\int(n-n)$, ſeu $\int 0$ aſſumi oportere ipſum numerum propoſitum $n$; ſic ſi

ſit

ſit $n = 7$, erit $\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - \int 0 = 12 + 6 - 3 - 7 = 8$, et ſi ſit $n = 12$, erit $\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28$.

## DEMONSTRATIO.

Formetur ſeries $z = x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 +$ etc. vbi quaelibet poteſtas ipſius $x$ multiplicata ſit per ſummam diuiſorum exponentis eius poteſtatis. Quodſi iam ſingulae diuiſorum ſummae reſolvantur, manifeſtum eſt, hanc ſeriem transformari in hanc formam

$$\begin{aligned} z = {} & 1(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \text{etc.}) + 2(x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + \text{etc.}) \\ & + 3(x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + \text{etc.}) + 4(x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20} + \text{etc}). \\ & + 5(x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + x^{25} + \text{etc.} + 6(x^6 + x^{12} + x^{18} + x^{24} + x^{30} + \text{etc.}) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

quibus ſeriebus geometricis ſummatis fiet:

$$z = \frac{1x}{1-x} + \frac{2xx}{1-xx} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \frac{4x^4}{1-x^4} + \frac{5x^5}{1-x^5} + \frac{6x^6}{1-x^6} + \text{etc.}$$

Multiplicetur haec forma per $-\frac{dx}{x}$, ac producti integrale erit

$$-\int \frac{zdx}{x} = l(1-x) + l(1-xx) + l(1-x^3) + l(1-x^4) + l(1-x^5) + \text{etc.}$$

ſeu $-\int \frac{zdx}{x} = l(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ etc.

quae expreſſio poſt ſignum logarithmicum, cum ſit eadem, quae in propoſitione praecedente vocata eſt $= s$, erit $-\int \frac{zdx}{x} = l\,s$, ideoque alterum valorem pro $s$ ſumendo, erit quoque:

$$-\int \frac{zdx}{x} = l(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.})$$

cuius differentiale per $\frac{-dx}{x}$ diuiſum, dabit alium valorem pro $z$, nempe

$$z = \frac{1x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - etc.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + etc.}$$

qui valor ſi aequalis ponatur aſſumto, et vtrinque per denominatorem $1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12}$ etc. multiplicetur, reperietur terminis ſecundum poteſtates ipſius $x$ diſponendis, omnibusque ad eandem partem collocandis;

$$\begin{array}{lllllllllll}
0 = & x\int 1 & + x^2\int 2 & + x^3\int 3 & + x^4\int 4 & + x^5\int 5 & + x^6\int 6 & + x^7\int 7 & + x^8\int 8 & + x^9\int 9 & + x^{10}\int 10 \; etc. \\
 & \cdot & - \int 1 & - \int 2 & - \int 3 & - \int 4 & - \int 5 & - \int 6 & - \int 7 & - \int 8 & - \int 9 \\
 & \cdot & \cdot & - \int 1 & - \int 2 & - \int 3 & - \int 4 & - \int 5 & - \int 6 & - \int 7 & - \int 8 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + \int 1 & + \int 2 & + \int 3 & + \int 4 & + \int 5 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + \int 1 & + \int 2 & + \int 3 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & -1 & -2 & * & * & +5 & * & +7 & * & * & *
\end{array}$$

vnde ſingularum poteſtatum ipſius $x$ coefficientibus nihilo aequatis, ſequitur fore

$$\begin{array}{ll}
\int 1 = 1 & \int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1 \\
\int 2 = \int 1 + 2 & \int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - 7 \\
\int 3 = \int 2 + \int 1 & \int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 \\
\int 4 = \int 3 + \int 2 & \int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 \\
\int 5 = \int 4 + \int 3 - 5 & \int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3
\end{array}$$

atque indolem illius aequationis vel leuiter attendenti patebit, eſſe generatim:

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) \; etc.$$

hac progreſſione quouis caſu eousque continuata, donec perueniatur ad ſummas numerorum negatiuorum. Deinde per ſe eſt perſpicuum, numeros abſolutos 1, 2, 5, 7, etc.

etc. qui in illis formulis conſpiciuntur, vicem tenere termini $\int o$; vnde concluditur, in caſibus quibus pro $\int n$ in progreſſione illa reperta occurrit terminus $\int(n-n)$, ſeu $\int o$, valorem eius ſemper ipſi numero propoſito $n$ aequalem eſſe capiendum: ſicque habetur plena ac perfecta demonſtratio theorematis propoſiti, quae, cum praeter tractationem ſerierum infinitarum, per logarithmos et differentialia procedat, minus quidem naturalis, ſed ob hoc ipſum multo magis notabilis eſt aeſtimanda.

## DE
# METHODO DIOPHANTEAE
## ANALOGA IN ANALYSI INFINITORVM

AVCT. *L. EVLERO.*

Quanta affinitas inter analyſin finitorum et infinitorum intercedat, cum vtraque ex iisdem principiis ſit nata, atque ſimilibus operationibus contineatur, nemo ignorat, qui in vtroque calculi genere vel leuiter fuerit verſatus. Multo latius autem hanc affinitatem patere deprehendi, quam vulgo putari ſolet, et quemadmodum in analyſi finitorum ea methodus, quae Diophanto accepta refertur, inſignem occupat locum, ita etiam in analyſi infinitorum eiusmodi dari calculi genus obſeruaui, qui methodo Diophanteae penitus ſit ſimilis, ſimilibusque operationibus abſoluatur. Quanquam autem huius methodi in analyſi infinitorum nonnulla iam paſſim occurrunt ſpecimina, quorum deinceps mentionem ſum facturus, tamen in iis nulla certa ſolutionis via cernitur, ſed ſolutiones caſu potius ac diuinatione inuentae videntur, ita vt in hoc calculo certa ac tuta methodus adhuc deſideretur. Quamobrem mihi quidem nouum calculi genus in medium proferre videor, qui omnino dignus ſit, in quo vberius excolendo Geometrae vires ſuas exerceant. Mihi quidem tantum contigit prima eius fundamenta eruere, quae autem iam ad plurima ſatis illuſtria ac non parum recondita problemata ſoluenda

da ſufficiunt; eaque hic quantum potero, breuiter et dilucide exponam, quo aliorum, qui in hoc genere elaborare voluerint, opera promoueatur ac ſubleuetur.

Vt igitur primum indolem et naturam huius nouae methodi definiam, ea ex ſimilitudine methodi diophanteae commodiſſime petetur. Quemadmodum enim methodus Diophantea ad problemata indeterminata eſt accommodata, atque ex infinita ſolutionum multitudine eas elicere docet, quae quantitatibus rationalibus contineantur: ita noua noſtra methodus quoque nonniſi indeterminata problemata complectitur; et cum diſcrimini, quod in analyſi finitorum inter quantitates rationales et ſurdas ſtatui ſolet, in analyſi infinitorum diſcrimen inter quantitates algebraicas ac transcendentes reſpondeat, nouae noſtrae methodi vis in hoc erit poſita, vt ex infinita cuiusque problematis ſolutionum copia, eae ſecernantur, quae quantitatibus algebraicis contineantur. Huiusmodi igitur problemata indeterminata methodo noſtrae ſunt propria; quorum ſolutio in genere concepta formulas transcendentes, ſeu integrales inuoluit, ex quibus deinceps eos caſus elici oportet, quibus quantitates illae transcendentes in algebraicas abeunt, ſeu, quod eodem redit, formulae illae integrales integrationem admittant.

Per exemplum tam natura huius nouae methodi, quam eius affinitas cum methodo diophantea clarius elucescet. Vti enim in methodo diophantea quaeri ſolet, quomodo quantitates $x$ et $y$ inter ſe debeant eſſe comparatae, vt haec formula $\sqrt{(xx+yy)}$ fiat rationalis, ita in noua noſtra methodo huic ſimilis erit iſta quaeſtio, qua inter quantitates variabiles $x$ et $y$ ea quae-

ritur conditio, vt formula ſpecie transcendens $\int V(dx^2+dy^2)$ fiat algebraica, ſeu vt huius formulae valor algebraice exhiberi queat. Manifeſtum eſt, hoc problemate, quod inſtar exempli attulimus, quaeri curvas algebraicas, quae ſint rectificabiles; relatio enim inter $x$ et $y$, quae coordinatas curuae denotabunt, requiritur algebraica, vnde quaeſtio circa curuas algebraicas verſatur, et cum huius curuae arcus indefinite per $\int V(dx^2+dy^2)$ exprimatur, quoties iſta formula algebraica reddetur, toties ipſa curua erit rectificabilis.

Simili modo ſi omnes eae curuae algebraicae deſiderentur, quae ſint quadrabiles, perſpicuum eſt, quaeſtionem huc redire, vt eae relationes inter quantitates variabiles $x$ et $y$ aſſignentur, quibus haec formula integralis $\int y\,dx$ integrationem admittat, atque ad valorem algebraicum perducatur.

Etſi autem hic potiſſimum quantitates algebraicae ſunt propoſitae, perinde atque in methodo Diophantea quantitates rationales ſpectari ſolent; tamen eo quoque referendae ſunt eiusmodi quaeſtiones, quibus formulae quaepiam integrales non algebraice exprimi, ſed propoſitam quandam transcendentium quantitatum ſpeciem implicare debent; veluti ſi quaerantur eiusmodi curuae algebraicae, quarum rectificatio non algebraice perfici queat, ſed a quadratura circuli pendeat. Variae enim transcendentium quantitatum ſpecies commodiſſime per quadraturas cognitarum curuarum deſignantur. Facile autem intelligitur, eandem methodum, quae curuas rectificabiles inuenire docet, quoque ad eas curuas, quarum rectifi-

rectificatio a data quadratura pendeat, inueniendas aptam fore, id quod ex ſequentibus clarius perſpicietur.

Huiusmodi problema iam ante complures annos a Celeb. *Hermanno* extat propoſitum, quo eiusmodi curuam algebraicam quaeſiuerat, quae non eſſet rectificabilis, ſed cuius rectificatio a quadratura datae curuae penderet, quae tamen nihilo minus tot, quot lubuerit, arcus abſolute rectificabiles haberet. Propoſitione huius problematis tum temporis ſummus Analyſeos promotor *Ioh. Bernoullius* b. m. adeo obſtupuit, vt non ſolum hoc problema ab *Hermanno* ſolutum eſſe non crediderit, ſed etiam ſagacitatem humanam longe ſuperare pronunciauerit; quod quidem nemini mirum videri debet, cum illo tempore nulla plane vllius methodi veſtigia patuiſſent, cuius ope huiusmodi problemata tractari poſſent. *Hermannus* etiam eius ſolutionem per longas ambages ex quadam linearum curuarum contemplatione hauſerat, vnde primo intuitu nihil plane emolumenti ad propoſitum expectare licuerat, ita vt inopinato ad ſolutionem ante perueniſſet, quam de ipſo problemate cogitaſſet. Viſa autem iſta *Hermanni* ſolutione, *Bernoullius* etiam aliam publicauit ſolutionem ex ſola analyſi petitam: ſed cuius fundamentum tantopere eſt abſconditum, vt diuinatione potius, quam vlla certa via, formulas ſuas ſolutionem continentes eruiſſe videatur.

Cum hoc problema non ſolum ob ſummam, qua implicabatur, difficultatem, ſed etiam ob eximium vſum, qui inde in analyſin redundare videbatur, omnium tum temporis Geometrarum admirationem excitaſſet, nemo tamen quantum conſtat, in certam atque ad hu-

ius

iusmodi problemata accommodatam methodum inquiſiuit, qua nouus omnino analyſeos infinitorum quaſi campus aperiretur. Ego igitur longo poſt interuallo fortaſſe primus de principiis nouae huius methodi cogitare coepi, quorum beneficio memorati illius problematis ſolutio directe ſine ambagibus ac diuinatione obtineri poſſet. Detexi quoque regulas quasdam non contemnendas, quae ad nouae iſtius methodi fundamenta iacienda idonea ſunt viſa, earumque ope non ſolum plures problematis illius, quod erat agitatum, ſolutiones ſum adeptus, ſed etiam nonnulla alia eiusdem generis problemata dedi ſoluta, cuiusmodi eſt illud, cuius ſolutionem exhibui in Diſſertatione de duabus curuis algebraicis ad communem axem relatis inueniendis, quae non ſint rectificabiles, ſed quarum rectificatio a data quadratura pendeat, ita tamen vt amborum arcuum eidem abſciſſae reſpondentium ſumma algebraice exprimi poſſit. Fontem ſolutionis, quam ibi dedi, de induſtria celaui, cum mihi eſſet propoſitum prima quaſi huius methodi elementa ſeorſim explicare, quo eorum vſus ampliſſimus clarius perſpiciatur, neque ea ad hoc vnicum problema adſtricta videantur. Fateri quidem ſtatim cogor, me leuem adhuc partem tantum huius nouae methodi, quam hic propono, enucleaſſe; verum his principiis ſtabilitis, non dubito, quin ea mox maiora incrementa ſit acceptura.

Diuiſio huius methodi in partes ſecundum naturam formularum integralium, quarum valores algebraici ſunt efficiendi, commodiſſime inſtituetur. Cum enim ſemper relatio inter duas quantitates variabiles $x$ et $y$

quaeratur

quaeratur, vt vna pluresue formulae integrales, quae has variabiles vna cum ſuis differentialibus inuoluant, algebraicos obtineant valores, huiusmodi formulas in ſequentes ordines diſtribui conueniet:

Ordo primus continebit huiusmodi formulas $\int Z dx$, vbi $Z$ eſt functio quaecunque algebraica ambarum quantitatum $x$ et $y$.

Ad ordinem ſecundum refero eas formulas $\int Z dx$, in quibus poſito $dy = p dx$, littera $Z$ eſt functio non ſolum ipſarum $x$ et $y$, ſed etiam ipſius $p$. Vbi notandum eſt, non ſolum formulam $\int Z dx$, ſed etiam hanc $\int p dx = y$ algebraicos habere debere valores. Huc reducuntur eae formulae integrales, in quibus ambo differentialia $dx$ et $dy$ occurrunt, veluti $\int V (dx^2 + dy^2)$, quae poſito $dy = p dx$ ad hanc formam $\int dx V (1 + pp)$ reuocatur.

Ordo porro tertius eiusmodi comprehendet formulas integrales, in quibus etiam differentialia ſecundi gradus inſunt, quae autem, ponendo $dy = p dx$ et $dp = q dx$, ad hanc formam $\int Z dx$ perducentur, vbi littera $Z$ erit functio quantitatum $x$, $y$, $p$, et $q$. His igitur caſibus non ſolum formulae $\int Z dx$, ſed etiam harum formularum $\int p dx$ et $\int q dx$ valores algebraici effici debebunt.

Ordo quartus complectetur eas formulas integrales, quae quantitatum $x$ et $y$ differentialia etiam tertii gradus inuoluunt; haeque ad formam $\int Z dx$ reducentur, ponendo $dy = p dx$; $dp = q dx$ et $dq = r dx$, vbi quantitas $Z$ continebit praeter quantitates $x$ et $y$ etiam

 has

has $p$, $q$, et $r$. Hincque ſimul ratio ſequentium ordinum intelligitur.

Praeter hos ordines peculiarem claſſem conſtituunt eiusmodi formulae $\int Z\,dx$, inquibus $Z$ non ſolum quantitates algebraicas $x, y, p, q$, etc. vti in his ordinibus, continet, ſed etiam formulas integrales complectitur, veluti ſi fuerit $Z = x\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, ſeu $Z = x\int dx\sqrt{(1+pp)}$, ita vt haec quantitas $\int x\,dx\int dx\sqrt{(1+pp)}$ efficienda ſit algebraica, pro quo relatio inter quantitates $x$ et $p$ definiri debeat. In hoc exemplo primum patet, cum ſit $dy = p\,dx$, valorem huius formulae $\int p\,dx$ eſſe debere algebraicum. Deinde etiam valorem huius $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ eſſe oportebit algebraicum, qui ſi ponatur $= s$, tandem haec formula $\int x\,s\,dx$ ad valorem algebraicum erit perducenda, ita vt vnica haec formula $\int x\,dx\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ reductionem harum trium formularum

I. $\int p\,dx = y$; II $\int dx\sqrt{(1+pp)} = s$; III $\int x\,s\,dx$

ad valores algebraicos requirat. Ex quo intelligitur, etiam huiusmodi formulas ad ordines ante enumeratos reuocari poſſe.

Totum igitur negotium nouae huius methodi, quam examini Analyſtarum propono, in hoc conſiſtit, vt eiusmodi relatio inter binas variabiles $x$ et $y$ inueſtigetur, quae vnam pluresue formulas integrales, cuiusmodi in ordinibus ſupra deſcriptis ſum complexus, algebraicas reddat. Hic autem non ſolum problemata occurrunt difficillima, a quorum ſolutione equidem adhuc longe ſum remotus, ſed etiam fortaſſe eiusmodi exco-

gitari

gitari poſſunt, quae nullam plane ſolutionem admittunt; omnino vti vſu venire ſolet in problematibus ad methodum Diophanteam pertinentibus. Vnde etiam ſine dubio haec ſimilitudo locum inueniet, vt alia problemata ſolutionem generalem, alia vero tantum ſolutiones ſpeciales permittant.

Huiusmodi igitur problemata hic tantum proferam, quorum ſolutionem inueni, vt hoc modo ſpecimen ac prima quaſi elementa nouae methodi, quam vlterius excolendam propono, exhibeam, quae etſi exiguam tantum partem huius methodi conſtituere videntur, tamen viam, qua vlterius progredi liceat, patefacient. Certa autem inde earum operationum ratio perſpicietur, quae directe nihilque diuinationi tribuendo ad ſolutiones eorum problematum, quae ante commemoraui, perducant.

## LEMMA.

1. *Formula $\int y\,dx$ erit algebraica, ſi haec $\int x\,dy$ fuerit talis, et generatim, a qua quadratura pendebit integratio alterius formulae $\int y\,dx$, ab eadem quoque alterius $\int x\,dy$ integratio pendebit.*

Demonſtratio eſt manifeſta, cum ſit $\int y\,dx = xy - \int x\,dy$, vnde patet, ſi formula $\int x\,dy$ fuerit vel algebraica, vel datam quadraturam implicans, eandem quoque naturam habere alteram formulam $\int y\,dx$.

## COROLLARIVM.

2. Simili modo integratio huius formulae $\int yx\,dx$, vel huius $\int yx^n\,dx$ pendebit ab integratione huius

$\int xxdy$, vel huius $\int x^{n+1}dy$, ob $\int yxdx = \frac{1}{2}yxx - \frac{1}{2}\int xxdy$, vel ob $\int yx^n dx = \frac{1}{n+1}yx^{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}dy$: vnde perſpicitur hoc lemma latiſſime patere, eiusque ope formulas omnis generis, quae integrabiles ſint reddendae, in alias transformari poſſe.

## SCHOLION.

3. Lemma hoc, quantumuis leue ac triuiale videatur, tamen praecipuum continet fundamentum nouae illius methodi, quam ſum adumbraturus. Si enim propoſita formula integrali quacunque $\int Y dX$ alia detur $\int V dZ$, vt ſit $A\int Y dX + B\int V dZ$ quantitas algebraica, manifeſtum eſt, harum duarum formularum $\int Y dX$ et $\int V dZ$ rationem ita eſſe comparatam, vt ſi altera fuerit integrabilis, etiam alteram fore integrabilem, et a quanam quadratura alterius integratio pendeat, ab eadem quadratura etiam alterius integrationem pendere. Reſolutio autem praecipuorum problematum ad hanc methodum pertinentium abſoluetur idonea formularum integralium, ad quas peruenitur, transformatione.

## PROBLEMA I.

4. Inuenire omnes curuas algebraicas, quae ſint quadrabiles; ſeu eam inter variabiles $x$ et $y$ relationem in genere definire, vt formula $\int y dx$ fiat integrabilis.

## SOLVTIO.

Si curuae abſciſſa ponatur $= x$ et applicata orthogonalis $= y$, erit huius curuae area $= \int y dx$, cuius valorem

valorem algebraicum eſſe oportet: quod quidem facilli-me impetratur. Denotet enim X functionem quamcunque algebraicam ipſius $x$, huicque functioni X aequalis ponatur area $\int y\,dx$, vt ſit $\int y\,dx = X$, erit, differentialibus ſumendis, $y\,dx = dX$, vnde ſit $y = \frac{dX}{dx}$; ſicque applicata $y$ aequabitur functioni algebraicae ipſius $x$, ex quo curua erit algebraica, eiusque area $\int y\,dx$, cum ſit $= X$, algebraice quoque exprimetur.

## ALITER.

Cum ſit area $\int y\,dx = yx - \int x\,dy$, ponatur $\int x\,dy$ functioni cuicunque ipſius $y$, quae ſit $= Y$, aequalis, ſeu ſit $\int x\,dy = Y$, vnde ſit $x = \frac{dY}{dy}$, ita vt iam abſciſſa $x$ functioni algebraicae ipſius $y$ aequetur, curuaque fiat algebraica. Poſita autem $x = \frac{dY}{dy}$, erit curuae area $\int y\,dx = yx - Y = \frac{y\,dY}{dy} - Y$, ideoque etiam algebraica.

## COROLL. 1.

5. Si X in priori ſolutione, vel Y in poſteriori, non fuerit functio algebraica ipſius $x$, vel $y$, ſed transſcendens, ita tamen vt $\frac{dX}{dx}$, vel $\frac{dY}{dy}$, fiat functio algebraica, curua quidem erit algebraica, ſed eius quadratura quantitate transcendente exprimetur.

## COROLL. 2.

6. Scilicet ſi in priori ſolutione ſit $X = P + \int Q\,dx$, exiſtentibus P et Q functionibus algebraicis ipſius $x$, ita tamen, vt $\int Q\,dx$ ſit quantitas transcendens, aequatio pro curua $y = \frac{dP}{dx} + Q$ erit quidem algebraica,

 ſed

ſed eius area $\int y\,dx = P + \int Q\,dx$ a quantitate transcendente $\int Q\,dx$ pendebit.

## COROLL. 3.

7. Simili modo in altera ſolutione ſi ponatur $Y = P + \int Q\,dy$, exiſtentibus P et Q functionibus algebraicis ipſius $y$, ita tamen vt $\int Q\,dy$ ſit quantitas transcendens, aequatio pro curua $x = \frac{dP}{dy} + Q$ erit algebraica, ſed area, quae erit $\int y\,dx = \frac{y\,dP}{dy} + yQ - P - \int Q\,dy$ a quantitate transcendente $\int Q\,dy$ pendebit.

## SCHOLION.

8. Vti huius problematis ſolutio eſt facillima nulloque artificio indiget, ſequens problema, quod quidem alius eſt naturae, adiungam, cuius vero ſolutio in aliis problematibus, quae ad hanc methodum referri ſolent, inſignem vſum praeſtabit. Veluti ſi quaerantur curuae algebraicae generatim non rectificabiles, quae tamen, quot lubuerit, habeant arcus rectificabiles; aliaeue huius generis quaeſtiones proponantur, principium ſolutionis ex ſequente problemate erit petendum.

## PROBLEMA. 2.

9. Inuenire curuas algebraicas in genere non quadrabiles, ſed quarum quadratura generalis datam quantitatem transcendentem inuoluat, in quibus tamen, quot lubuerit, areas abſolute quadrabiles aſſignare liceat.

## SOLVTIO.

Ex ſolutione praecedentis problematis liquet, hanc quaeſtionem huc redire, vt eiusmodi formula transcendens

dens $\int Q dx$ inueſtigetur, cuius valor certis caſibus, veluti ſi ponatur $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. euaneſcat, his enim caſibus quantitas $X = P + \int Q dx$, quae in genere eſt transcendens, quippe formulam $\int Q dx$ inuoluens, fiet algebraica, nempe $= P$. Hoc vt efficiatur, ſtatuatur, $\int Q dx = \int u dx - \int v dz$, vbi $v$ talis ſit functio ipſius $z$, qualis $u$ eſt ipſius $x$, ita vt formulae $\int u dx$ et $\int v dz$ ſimilem quantitatem transcendentem exhibeant, qua $\int Q dx$ contineri debet. Sit autem $z$ eiusmodi functio ipſius $x$, ita vt caſibus propoſitis $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. quot lubuerit, fiat $z = x$, ideoque et $v = u$, atque perſpicuum eſt, his iisdem caſibus fore $\int v dz = \int u dx$, hincque $\int Q dx = o$. Hunc in finem formetur iſta functio ipſius $x$.

$$x^n - (a+b+c+\text{etc.})x^{n-1} + (ab+ac+bc+\text{etc.})x^{n-2} - (abc+\text{etc.})x^{n-3} + \text{etc.}$$

quae breuitatis gratia vocetur $= S$, ita vt aequatio $S = o$ praebeat radices $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. eos ſcilicet ipſos valores abſciſſae $x$, quibus area abſolute quadrabilis reſpondere debet. Tum vero ſtatuatur $z - x = S$, atque manifeſtum eſt, iisdem caſibus $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. fieri $z = x$, omnino vti requiri ad noſtrum propoſitum oſtendimus. Huic autem requiſito generalius ſatisfiet, ſi ponamus $z - x = ST$, dummodo $ST = o$ alias non praebeat radices reales, niſi quae ſunt propoſitae, ſcilicet $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. Hanc ob rem ſi $S$ denotet eiusmodi functionem ipſius $x$, vt aequatio $S = o$ alias non habeat radices reales, niſi quae ſunt propoſitae, ſcilicet $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. quod ſemper infinitis modis fieri poteſt, tum ſumatur $z - x = S$, ſeu $z = x + S$.

Quo

Quo facto, ſi $\int u\,dx$ eam quantitatem transcendentem exprimat, à qua curuae quadratura in genere pendere debet; pro $v$ ſubſtituatur talis functio ipſius $z$, qualis $u$ eſt ipſius $x$; atque in formulis ſuperioribus loco $\int Q\,dx$ ſcribatur $\int u\,dx - \int v\,dz$, ita vt ſit $Q = u - \frac{v\,dz}{dx}$. Tum enim ſi conſtruatur curua algebraica, cuius abſciſſae $= x$ reſpondeat applicata $y = \frac{dP}{dx} + u - \frac{v\,dz}{dx}$, eius area in genere erit $\int y\,dx = P + \int u\,dx - \int v\,dz$, pendebit ſcilicet a quantitate transcendente $\int u\,dx$, cui altera $\int v\,dz$ eſt ſimilis, nihilo vero minus caſibus $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. eius area algebraice exprimetur, fietque $\int y\,dx = P$. Hoc ergo modo effici poteſt, vt curua praeciſe tot, quot quis voluerit, obtineat àreas quadrabiles, neque plures, neque pauciores.

## COROLL. 1.

10. Cum $v$ talis ſit functio ipſius $z$, qualis $u$ eſt ipſius $x$, ita vt $v$ obtineatur ex $u$, ſi loco $x$ ſcribatur $z$, ſequitur etiam $v$ talem eſſe functionem ipſius $u$, qualis $z$ eſt ipſius $x$. Quare cum ſit $z = x + S$, ſequitur $v$ obtineri ex $u$, ſi loco $x$ ſcribatur $x + S$.

## COROLL. 2.

11. Quoniam igitur quantitas $v$ reſultat ex functione $u$, ſi loco $x$ ſcribatur $x + S$, ex proprietate functionum alias demonſtrata ſequitur fore

$$v = u + \frac{S\,du}{dx} + \frac{S^2\,ddu}{1\cdot 2\,dx^2} + \frac{S^3\,d^3u}{1\cdot 2\cdot 3\,dx^3} + \frac{S^4\,d^4u}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,dx^4} + \text{etc.}$$

poſito elemento $dx$ conſtante, ſed cum haec expreſſio in infinitum ſit continuanda, praeſtat valorem ipſius $v$ actuali ſubſtitutione definire.

EXEM-

## EXEMPLVM.

12. *Inuenire curuam algebraicam, cuius quadratura indefinita pendeat a quadratura circuli, cuius vero area abſciſſae $x = a$ reſpondens algebraice exhibeatur.*

Vt quadratura curuae indefinita a quadratura circuli pendeat, ponatur $u = \sqrt{(2fx - xx)}$, et vt poſito $x = a$ *fiat* $z = x$, fiat $S = n(a - x)$, vt ſit $z = x + na - nx = na - (n - 1)x$. Ergo ob $v = \sqrt{(2fz - zz)}$ erit $v = \sqrt{(2naf - 2(n-1)fx - nnaa + 2n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)}$ Ponatur, vt haec formula ſimplicior euadat, $2f = na$, eritque $v = \sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)}$, et ob $dz = -(n-1)dx$ habebitur $Q = \sqrt{(nax - xx)} + (n-1)\sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)}$ ac pro curua erit

$$y = \frac{dP}{dx} + \sqrt{(nax - xx)} + (n-1)\sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)};$$

area vero erit

$$\int y dx = P + \int dx \sqrt{(nax - xx)} + (n-1)\int dx \sqrt{(n(n-1)ax - (n-1)^2 xx)}.$$

Verum hic notandum eſt, quemadmodum integrale $\int u dx$ ita capi ponitur, vt euaneſcat poſito $x = 0$, ita quoque integrale $\int v dz$ ita capi debere, vt euaneſcat poſito $z = 0$: Quamobrem vt tota area euaneſcat poſito $x = 0$, neceſſe eſt, vt quoque fiat $z = 0$ hoc caſu; alioquin enim expreſſio areae $\int y dx$ complecteretur quantitatem conſtantem portionem areae circularis denotantem, quae caſu $x = a$ deſtrueretur. Huic autem incommodo occurretur, ſi pro S eiusmodi ſumatur functio, quae poſito $x = 0$ euaneſcat. Sit ergo $S = \frac{nx}{a}(a - x)$, et $z = x + \frac{nx}{a}(a - x)$, et $v = \sqrt{(2fz - zz)}$, atque quaeſito ſatisfiet modo ſolito. Ponatur, vt expreſſio fiat ſimpliciſſima $n = -1$, vt ſit

$z = \frac{xx}{a}$ et $v = \sqrt{(\frac{2fxx}{a} - \frac{x^4}{aa})} = \frac{x}{a}\sqrt{(2af - xx)}$ eritque applicata $y = \frac{dP}{dx} + \sqrt{(2fx - xx)} - \frac{2xx}{aa}\sqrt{(2af - xx)}$ ob $dz = \frac{2xdx}{a}$ : atque area fiet

$$\int y\,dx = P + \int dx\sqrt{(2fx - xx)} - 2\int\frac{xxdx}{aa}\sqrt{(2af - xx)}$$

quae qualiscunque P fuerit functio ipſius $x$, in genere ſemper a quadratura circuli pendebit, caſu autem $x = a$ area fiet algebraica $= P$.

## SCHOLION.

13. Circumſtantia haec ratione conſtantis ad areae expreſſionem adiiciendae, ne ea ipſa ſit tranſcendens, in omnibus exemplis probe eſt obſeruanda. Hunc in finem functio S non ſolum ita accipi debebit, vt caſibus propoſitis $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. euaneſcat, ſed etiam caſu $x = o$ euaneſcere debebit. Quod quidem per ſe eſt perſpicuum: nam quia omnis curuae aream abſciſſae euaneſcenti $x = o$ reſpondentem nihilo aequalem aſſumimus, ideoque a tranſcendentibus quantitatibus vacuam, euidens eſt, quotcunque caſus propoſiti ſint, quibus area fiat algebraica, iis ſemper ſuperaddendum eſſe caſum $x = o$, ſicque functio S ita comparata eſſe debebit, vt non ſolum caſibus $x = a$, $x = b$, $x = c$ etc. qui ſunt propoſiti, ſed etiam caſu $x = o$ fiat $S = o$.

## PROBLEMA 3.

14. Si $Z$ ſit functio quaecunque algebraica binarum variabilium $x$ et $y$, definire relationem algebraicam inter $x$ et $y$, vt formula integralis $\int Z dx$ algebraicum obtineat valorem.

SOLV.

## SOLVTIO.

Etſi problema hoc multo latius patere videtur, quam primum, tamen eius ſolutio non eſt difficilior. Ponatur enim $\int Z dx$ functioni cuicunque algebraicae ipſius $x$, quae ſit $= X$ aequale, eritque $Z dx = dX$ et $Z = \frac{dX}{dx}$, vbi cum $\frac{dX}{dx}$ ſit quoque functio algebraica pſius $x$, habebitur aequatio algebraica inter $x$ et $y$, qua earum relatio algebraice definietur: indeque erit per hypotheſin $\int Z dx = X$.

## COROLL. 1.

15. Si X non ſit functio algebraica ipſius $x$, ſed eius quampiam inuoluat functionem transcendentem, veluti ſi ſit $X = P + \int Q dx$, ita vt $\frac{dX}{dx} = \frac{dP}{dx} + Q$, ſit nihilominus functio algebraica ipſius $x$; tum orietur curva algebraica hac aequatione $Z = \frac{dP}{dx} + Q$ expreſſa, ſed valor integralis inde oriundus $\int Z dx$ non erit algebraicus, verum functionem transcendentem $\int Q dx$ involuet.

## COROLL. 2.

16. Si pro Q eiusmodi quantitatem ſubſtituamus, qualem in problemate praecedente deſcripſimus, tum valor quidem indefinitus formulae $\int Z dx$ non erit algebraicus, ſed a quadratura quapiam data pendebit. Hoc tamen non obſtante effici poteſt, vt eius valor tot caſibus, quot lubuerit, et quidem datis veluti $x = a$, $x = b$, $x = c$, etc. fiat algebraicus. Vbi quidem notandum eſt, in calculo his caſibus ſuperaddendum eſſe ſemper caſum $x = 0$.

## SCHOLION.

17. Si igitur vnica proponatur formula integralis ad valorem algebraicum reducenda, eaque pertineat ad ordinem primum, tum quaeſtio nulla laborat difficultate. Atque ſimul pari opera effici poteſt, vt illius formulae integratio a data quadratura pendeat, atque inſuper vt tot, quot quis voluerit, caſibus algebraicum obtineat valorem. Antequam igitur ad formulas ſequentium ordinum progrediar, eiusmodi problemata proponam, quibus duae pluresue formulae ordinis primi ſimul ad valores algebraicos ſint reducendae; ita vt exiſtentibus $V$ et $Z$ functionibus ipſarum $x$ et $y$, valores harum duarum formularum $\int V\,dx$ et $\int Z\,dx$ vel plurium huiusmodi algebraici ſint efficiendi. Hic quidem ante omnia animaduerto, haec problemata in genere concepta mihi quidem non ſolubilia videri, ſed nonniſi ſub certis conditionibus, quibus functiones $V$ et $Z$ ſint praeditae, ſolutionem admittere. Quibus igitur caſibus mihi quidem ad ſolutionem peruenire licuerit, hic exponam.

## PROBLEMA 4.

18. Si $P$ et $Q$ ſint functiones quaecunque ipſius $x$, inuenire relationem idoneam inter variabiles $x$ et $y$, vt ambae hae formulae $\int y P\,dx$ et $\int y Q\,dx$ valores algebraicos adipiſcantur.

## SOLVTIO.

Ponatur vtraque formula ſeorſim aequalis quantitati cuicunque algebraicae, ſcilicet

$$\int y P\,dx = L \text{ et } \int y Q\,dx = M.$$

Hinc

Hinc ergo fiet $y = \frac{dL}{Pdz}$ et $y = \frac{dM}{Qdz}$ ideoque $\frac{P}{Q} = \frac{dL}{dM}$, vbi ſint L et M functiones nouae cuiuspiam variabilis $z$, ita vt $\frac{dL}{dM}$ ſit functio algebraica huius variabilis $z$. Ope aequationis ergo inuentae $\frac{P}{Q} = \frac{dL}{dM}$ valor ipſius $x$, cuius functio eſt $\frac{P}{Q}$, per $z$ expreſſus reperietur, ita vt inde proditurum ſit $x =$ functioni cuipiam ipſius $z$. Qua inuenta obtinebitur quoque valor ipſius $y$ per functionem quampiam ipſius $z$ expreſſus, ope formulae $y = \frac{dL}{Pdx}$ vel $y = \frac{dM}{Qdx}$, ſicque vtraque variabilis $x$ et $y$ per nouam variabilem $z$ determinabitur, idque algebraice; vnde relatio inter $x$ et $y$ quaeſita innoteſcet. Ex his autem valoribus erit, vti aſſumſimus, $\int y P dx = L$ et $\int y Q dx = M$, vtraque ſcilicet functioni algebraicae ipſius $z$ aequalis.

## ALIA SOLVTIO.

Ponatur vt ante altera formula $\int y P dx$ quantitati cuipiam algebraicae L aequalis, ſeu $\int y P dx = L$ eritque hinc $y = \frac{dL}{Pdx}$, qui valor in altera formula ſubſtitutus dabit $\int y Q dx = \int \frac{Q}{P} dL$, quae algebraica reddenda reſtat. Iam vero per lemma praemiſſum eſt $\int \frac{Q}{P} dL = \frac{LQ}{P} - \int L d. \frac{Q}{P}$.

Sicque formula $\int L d. \frac{Q}{P}$ ad algebraicum valorem reduci debet; vbi notandum $d. \frac{Q}{P}$ huiusmodi formam $X dx$ eſſe habiturum, vbi ſit X functio ipſius $x$ cognita. Ponatur ergo $\int L d. \frac{Q}{P}$ functioni cuicunque ipſius $x$, quae ſit V aequalis, erit $L = \frac{dV}{d(Q:P)}$ functioni ſcilicet ipſius $x$. Inuento autem valore ipſius L erit porro $\int y P dx$



$= L$;

$= L$; $\int y Q dx = \frac{LQ}{P} - V$ atque variabilis $y$ ita definietur per $x$, vt ſit $y = \frac{dL}{P dx}$, exiſtente vti inuenimus $L = dV : d. \frac{Q}{P}$: hoc ergo modo immediate, nulla alia noua variabili in ſubſidium vocata, variabilem $y$ per $x$ dedimus determinatam.

## COROLL. 1.

19. Cum in priori ſolutione altera variabilis $x$ definiri debeat ex aequatione $\frac{P}{Q} = \frac{dL}{dM}$, altera vero ſit $y = \frac{dL}{P dx}$, ſicque vtraque per nouam variabilem $z$ cuius L et M ſunt functiones algebraicae, exprimatur, ambae formulae integrales propoſitae valores obtinebunt algebraicos ſcilicet

$$\int y P dx = L \text{ et } \int y Q dx = M$$

## COROLL. 2.

20. Per eandem ergo ſolutionem ſumendis pro L et M functionibus transcendentibus ipſius $z$, ita tamen vt $\frac{dL}{dz}$ et $\frac{dM}{dz}$ ſint functiones algebraicae, effici poterit, vt integratio vtriusque formulae propoſitae $\int y P dx$ et $\int y Q dx$ a data quadratura pendeat; vel vt altera ſit algebraica, altera vero datam quadraturam inuoluat.

## COROLL. 3.

21. Si ambae hae formulae debeant eſſe algebraicae, ſolutio poſterior eundem praeſtat vſum; ſumta enim pro V functione quacunque algebraica ipſius $x$, erit $L = dV : d. \frac{Q}{P}$ quoque functio algebraica ipſius

$x$;

$x$; tum vero ſi ſtatuatur altera variabilis $y = \frac{dL}{P\,dx}$, erit

$$\int y\,P\,dx = L \text{ et } \int y\,Q\,dx = \frac{LQ}{P} - V \text{ ſeu}$$

$$\int y\,P\,dx = \frac{dV}{d.\frac{Q}{P}} \text{ et } \int y\,Q\,dx = \frac{Q\,dV}{P\,d.\frac{Q}{P}} - V$$

## COROLL. 4.

22. Sin autem in hac ſolutione pro V capiatur functio transcendens ipſius $x$, ita tamen vt $\frac{dV}{dx}$ ſit functio algebraica, ob $\frac{d(Q:P)}{dx}$ etiam functionem algebraicam, fiet quoque $L = dV : d.\frac{Q}{P}$, ideoque etiam $y$ functio algebraica ipſius $x$; vnde prioris formulae $\int yPdx = L$ valor fiet algebraicus, atque altera tantum $\int y\,Q\,dx$ a praeſcripta quadratura V pendebit.

## COROLL. 5.

23. Per hanc igitur alteram ſolutionem effici non poteſt, vt vtraque formula integralis propoſita datam quadraturam inuoluat, dum alterius valor ſemper reperitur algebraicus. Quare ſi vtraque debeat habere valorem transcendentem, ſolutione priore erit vtendum.

## EXEMPLVM.

24. *Inuenire curuas algebraicas, in quibus non ſolum area $\int y\,dx$, ſed etiam areae momentum $\int y\,x\,dx$ algebraice exhiberi poſſit.*

Per priorem ſolutionem ponatur:

$$\int y\,dx = L \text{ et } \int y\,x\,dx = M$$

erit $y = \frac{dL}{dx} = \frac{dM}{x\,dx}$ vnde fit $x = \frac{dM}{dL}$ et

$y =$

$y = dL : d(\frac{dx}{dL})$, vbi pro L et M functiones quaecunque algebraicae nouae variabilis $z$ accipi poſſunt. Nihil ergo impedit quo minus ſtatuatur $L = z$, et pro M ſumatur functio quaecunque ipſius $z$, quae ſit $= Z$, quo facto erit $x = \frac{dZ}{dz}$ et ſumto elemento $dz$ conſtante $y = \frac{dz^2}{ddZ}$.

Per alteram ſolutionem ponatur $\int y\,dx = L$, vt ſit $y = \frac{dL}{dx}$, erit $\int y\,x\,dx = \int x\,dL = xL - \int L\,dx$. Statuatur iam $\int L\,dx = V$ functioni cuicunque ipſius $x$, erit $L = \frac{dV}{dx}$, ideoque $\int y\,dx = \frac{dV}{dx}$ et $\int y\,x\,dx = \frac{x\,dV}{dx} - V$, vnde poſito elemento $dx$ conſtante applicata $y$ ita per abſciſſam $x$ definietur, vt ſit $y = \frac{ddV}{dx^2}$.

## SCHOLION.

25. Me non monente intelligitur, ſimili modo huiusmodi formulas $\int Y\,P\,dx$ et $\int Y\,Q\,dx$ ad valores algebraicos reduci poſſe, ſi Y functionem quamcunque alterius variabilis $y$ deſignet, dummodo P et Q ſint functiones ipſius $x$; determinationes enim ante pro $y$ inuentae nunc ipſi Y ſunt tribuendae. Quin etiam, ſi Y denotet functionem quampiam ipſarum $x$ et $y$, ſolutio pari modo abſoluetur: ita reductio harum formularum $\int P\,dx\,\sqrt{(xx+yy)}$ et $\int Q\,dx\,\sqrt{(xx+yy)}$ ad valores algebraicos nullam habebit difficultatem, quoniam hae formulae ſimiles euadent propoſitis, ſi pro $\sqrt{(xx+yy)}$ ſcribatur vnica littera $v$. Vnde colligitur ope huius problematis ſemper binas huiusmodi formulas $\int V\,dx$ et $\int Z\,dx$ ad valores algebraicos perduci poſſe, quaecunque V et Z fuerint functiones ipſarum $x$ et $y$, dummo-

dummodo $\frac{V}{Z}$ ſit functio ipſius $x$ tantum. Si enim $x$ ſit iſta functio, ſeu $\frac{V}{Z} = x$, loco alterius variabilis $y$ introducatur noua $v$, vt ſit $v = \frac{V}{X}$ ſeu $v = Z$, atque formulae reducendae erunt $\int v X\, dx$ et $\int v\, dx$, quarum reſolutio iam erit in promtu. Inueſtigemus vero etiam alia formularum integralium paria, quae ſimili modo ad valores algebraicos reduci queant, quod eueniet ſi quapiam transformatione ad huiusmodi formas reuocari potuerint.

## PROBLEMA 5.

26. Si P et Q fuerint functiones quaecunque ipſius $x$, inuenire relationem idoneam inter variabiles $x$ et $y$, vt ambae hae formulae $\int P\, dy$ et $\int Q\, dy$ valores algebraicos adipiſcantur.

## SOLVTIO.

Cum per lemma praemiſſum ſit $\int P\, dy = Py - \int y\, dP$ et $\int Q\, dy = Qy - \int y\, dQ$, quaeſtio huc redit, vt hae duae formulae integrales $\int y\, dP$ et $\int y\, dQ$ valores algebraicos conſequantur, quod per problema praecedens duplici modo efficietur.

I. Statuatur enim $\int y\, dP = L$ et $\int y\, dQ = M$ erit $y = \frac{dL}{dP} = \frac{dM}{dQ}$, vnde fit $\frac{dP}{dQ} = \frac{dL}{dM}$: vbi cum $\frac{dP}{dQ}$ ſit functio ipſius $x$, ſi pro L et M functiones quaecunque nouae cuiusdam variabilis $z$ aſſumantur, vt $\frac{dL}{dM}$ fiat functio huius variabilis $z$, ex aequatione $\frac{dP}{dQ} = \frac{dL}{dM}$ quantitas $x$ per $z$ determinabitur, ita vt $x$ aequalis reperiatur functioni cuidam ipſius $z$. Dehinc aequatio $y = \frac{dL}{dP}$ de-

finiet alteram variabilem $y$ per eandem $x$: quo facto habebitur:

$$\int P\,dy = \frac{P\,dL}{dP} - L \text{ et } \int Q\,dy = \frac{Q\,dM}{dQ} - M.$$

II. Pro altera ſolutione fiat $\int y\,dP = L$, vt ſit $y = \frac{dL}{dP}$, eritque altera formula $\int y\,dQ = \int \frac{dQ}{dP} dL = L.\frac{dQ}{dP} - \int L\,d.\frac{dQ}{dP}$; vbi cum $\frac{dQ}{dP}$ ſit functio ipſius $x$, ponatur $\int L\,d.\frac{dQ}{dP} = V$ functioni cuicunque ipſius $x$, orietur hinc $L = \frac{dV}{d(dQ:dP)}$. Inuenta ergo hac quantitate $L = \frac{dV}{d(dQ:dP)}$, quae erit functio ipſius $x$, habebitur altera variabilis $y = \frac{dL}{dP}$ indeque valores algebraici binarum formularum integralium propoſitarum erunt:

$$\int P\,dy = Py - L \text{ et}$$
$$\int Q\,dy = Qy - \frac{L\,dQ}{dP} + V.$$

## COROLL. 1.

27. Si hae formulae non debeant eſſe algebraicae, ſed datas quadraturas inuoluentes, eadem valebunt quae ad problema praecedens annotaui. Scilicet ſi vtraque debeat eſſe transcendens, hoc nonniſi per ſolutionem priorem praeſtari poterit, ſin autem altera tantum quantitatem transcendentem implicare debeat, per vtramque ſolutionem ſatisfieri poterit.

## COROLL. 2.

28. Hinc etiam patet ſi formulae propoſitae fuerint huiusmodi $\int y\,P\,dx$ et $\int Q\,dy$, reductionem ad valores algebraicos pari modo perfici poſſe. Cum enim ſit $\int Q\,dy = Qy - \int y\,dQ$, has duas formulas reduci opor-

oportebit $\int y P\,dx$ et $\int y\,dQ$, quae non differunt ab iis, quae in praecedente problemate ſunt tractatae.

## COROLL. 3.

29. Intelligitur etiam, ſi Y denotet functionem quandam ipſius $y$, ſimili modo huiusmodi binas formulas $\int PY\,dy$ et $\int QY\,dy$ ad valores algebraicos reduci poſſe, dummodo $\int Y\,dy$ integrationem admittat. Poſito enim $\int Y\,dy = v$, formulae reducendae erunt $\int P\,dv$ et $\int Q\,dv$, quae hic propoſitis ſunt ſimiles. At ſi $\int Y\,dy$ ſit functio transcendens ipſius $y$ reductio modo hic expoſito non ſuccedit.

## PROBLEMA. 6.

30. Inuenire relationem algebraicam inter variabiles $x$ et $y$, vt hae duae formulae integrales $\int y^m x^{n-1}\,dx$ et $\int y^\mu x^{\nu-1}\,dx$ valores algebraicos obtineant.

## SOLVTIO.

Coaequatis his formulis inter ſe fit $y^m x^n = y^\mu x^\nu$ vnde oritur $y = x^{\frac{\nu-n}{m-\mu}}$. Ponatur ergo:

$y = x^{\frac{\nu-n}{m-\mu}} z$, vt ſit $y^m = x^{\frac{m\nu-mn}{m-\mu}} z^m$ et $y^\mu = x^{\frac{\mu\nu-\mu n}{m-\mu}} z^\mu$

atque formulae propoſitae abibunt in has:

$\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^m\,dx$ et $\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^\mu\,dx$

Iam vero eſt:

$$\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^m\,dx = \frac{m-\mu}{m\nu-\mu n} x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^m - \frac{m(m-\mu)}{m\nu-\mu n}\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^{m-1}\,dz$$

$$\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}-1} z^{\mu}\,dx = \frac{m-\mu}{m\nu-\mu n}\, x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^{\mu} - \frac{\mu(m-\mu)}{m\nu-\mu n}\int x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} z^{\mu-1}\,dz$$

Niſi ergo ſit $m\nu = \mu n$, quo caſu haec reductio locum non habet, ſi ponatur $x^{\frac{m\nu-\mu n}{m-\mu}} = v$, quaeſtio perducetur ad has formulas:

$$\int v\, z^{m-1}\,dz \text{ et } \int v\, z^{\mu-1}\,dz$$

quae per problema ſuperius ſine difficultate reſoluuntur.

## ALITER.

Si neque $n$ neque $\nu$ fuerit $= 0$, alia ſolutio ſimili modo adhiberi poteſt. Scilicet cum ſit

$$\int y^m x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}\, y^m x^n - \frac{m}{n}\int x^n y^{m-1}\,dy \text{ et}$$

$$\int y^{\mu} x^{\nu-1}\,dx = \frac{1}{\nu}\, y^{\mu} x^{\nu} - \frac{\mu}{\nu}\int x^{\nu} y^{\mu-1}\,dy$$

quaeſtio redit ad has duas formulas:

$$\int x^n y^{m-1}\,dy \text{ et } \int x^{\nu} y^{\mu-1}\,dy$$

quae poſito $x = y^{\frac{\mu-m}{n-\nu}} z$ perinde atque ante tractantur.

## COROLL. 1.

31. Si ſit vel $m = \mu$ vel $n = \nu$, formulae propoſitae ſtatim per ſuperius problema reduci poſſunt, ſine vlla praeuia praeparatione. Caſu tamen poſteriori quo $n = \nu$ excipiendus eſt caſus quo $n = \nu = 0$; quia reductio ſupra praeſcripta hic non ſuccedit.

## COROLL. 2.

32. Per praecepta ergo adhuc tradita huiusmodi binae formulae $\int \frac{y^m\,dx}{x}$ et $\int \frac{y^{\mu}\,dx}{x}$ ad valores algebraicos reduci nequeunt.

COROL.

## COROLL. 3.

33. Praeterea vero etiam excipiuntur caſus, quibus $m\nu = \mu n$, ſeu $m : n = \mu : \nu$, qui ob eandem rationem reductionem non permittunt. Qui caſus quo facilius cognoſcantur, ſit $m = \alpha\mu$, et $n = \alpha\nu$, erunt formulae hoc pacto irreductibiles;

$$\int y^{\alpha\mu} x^{\alpha\nu-1} dx \text{ et } \int y^{\mu} x^{\nu-1} dx.$$

## COROLL. 4.

34. Sit breuitatis gratia $y^{\mu} = z$ et $x^{\nu} = v$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\nu v}$, vnde formulae hae irreductibiles ſunt.

$$\frac{1}{\nu}\int z^{\alpha} v^{\alpha-1} dv \text{ et } \frac{1}{\nu}\int z\,dv.$$

Ac ſi vlterius ponatur $z = \frac{u}{v}$, hae formulae abibunt in $\frac{1}{\nu}\int\frac{u^{\alpha} dv}{v}$ et $\frac{1}{\nu}\int\frac{u\,dv}{v}$, quae iam in formulis Coroll. 2. excluſis continentur.

## COROLL. 5.

35. Reliquis igitur caſibus omnibus, qui in his exceptionibus locum non habent, reductio ad valores algebraicos ſemper abſolui poterit, idque duplici modo pro vtraque ſolutione hic tradita, atque vtroque modo gemina reſolutio valebit ſecundum binas problematis ſuperioris ſolutiones.

## PROBLEMA 7.

36. Si P et Q fuerint functiones ipſius $x$, inuenire relationem algebraicam inter $x$ et $y$, vt ambae

hae formulae $\int y^m P\,dx$ et $\int y^n Q\,dx$ valores algebraicos obtineant.

## SOLVTIO.

Ponatur $y = (\frac{Q}{P})^{\frac{1}{m-n}} z$ ſeu $y = Q^{\frac{1}{m-n}} P^{\frac{-1}{m-n}} z$ ex hacque ſubſtitutione aſſequemur:

$$\int y^m P\,dx = \int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} z^m dx,$$

$$\int y^n Q\,dx = \int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} z^n dx$$

Iam notandum eſt reductionem, quam intendimus, eſſe ſucceſſuram, ſi haec formula:

$\int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} dx$ integrationem admittat.

Niſi enim haec conditio locum habeat, fateor me ſolutionem exhibere non poſſe. Sit igitur

$$\int P^{\frac{-n}{m-n}} Q^{\frac{m}{m-n}} dz = X$$

ideoque X functio algebraica ipſius $x$, formulaeque reducendae erunt:

$\int z^m dX$ et $\int z^n dX$, vnde reſultat

$$\int z^m dX = X z^m - m \int X z^{m-1} dz$$

$$\int z^n dX = X z^n - n \int X z^{n-1} dz$$

Harum autem formularum reductio ſupra iam idque duplici modo eſt oſtenſa.

## COROLL.

37. Si eſſet $m = n$, problema congrueret cum problemate quarto, ita vt incommoda, quae in hac ſolutione inde oritura videntur, nihil plane noceant. Conditio

ditio igitur, ſub qua reductio propoſitarum formularum ſuccedit, poſtulat, vt formula differentialis $P^{\frac{-n}{m-n}}Q^{\frac{m}{m-n}}dP$ integrationem admittat.

## PROBLEMA 8.

38. Si V et Z ſint functiones ipſarum $x$ et $y$ homogeneae, atque V functio $m$ dimenſionum, Z vero functio $n$ dimenſionum, inuenire relationem algebraicam inter $x$ et $y$, qua duae hae formulae:

$\int V\,dx$ et $\int Z\,dx$ reddantur integrabiles.

## SOLVTIO.

Quia V et Z ſunt functiones homogeneae, ita vt ambae variabiles $x$ et $y$ vbique eundem dimenſionum numerum compleant, ibi nempe dimenſionum numerum $m$, hic vero $n$: ponatur $y = t\,x$, atque functio V abibit in $x^mP$, et Z in $x^nQ$, vbi P et Q erunt functiones quantitatis $t$. Ita cum per hanc ſubſtitutionem fiat

$$V = x^mP \text{ et } Z = x^nQ,$$

formulae ad reducendum propoſitae erunt

$$\int P\,x^m dx \text{ et } \int Q\,x^n dx,$$

vbi P et Q ſunt functiones alterius variabilis $t$, cuius ad $x$ relationem inueſtigare oportet. Iam hae duae formulae ex duabus variabilibus $t$ et $x$ conſtantes reducuntur ad

$$\int P\,x^m dx = \frac{1}{m+1}P\,x^{m+1} - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}dP$$

$$\int Q\,x^n dx = \frac{1}{n+1}Q\,x^{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}dQ$$

dummo-

dummodo neque $m$ neque $n$ fuerit $= -1$. Quare cum reductio ad has formulas $\int x^{m+1} dP$ et $\int x^{n+1} dQ$ reuocatur, ponatur $x = (\frac{dQ}{dP})^{\frac{1}{m-n}} z = z\, dP^{\frac{1}{n-m}} dQ^{\frac{1}{m-n}}$ formulaeque reducendae erunt

$$\int z^{m+1} dP^{\frac{n+1}{n-m}} dQ^{\frac{m+1}{m-n}} \text{ et } \int z^{n+1} dP^{\frac{n+1}{n-m}} dQ^{\frac{m+1}{m-n}}$$

quibus valores algebraicos conciliare licebit, ſi formula differentialis $dP^{\frac{n+1}{n-m}} dQ^{\frac{m+1}{m-n}} = (\frac{dP}{dQ})^{\frac{n+1}{n-m}} dQ$ abſolute fuerit integrabilis; reliquis enim caſibus haec reductio non ſuccedit. Ponamus ergo hanc formulam eſſe integrabilem, et cum eius integrale futurum ſit functio algebraica ipſius $t$, quae ſit T, ita vt habeatur

$$\int dP^{\frac{n+1}{n-m}} dQ^{\frac{m+1}{m-n}} = T$$

atque formulae reducendae fient:

$$\int z^{m+1} dT = z^{m+1} T - (m+1) \int T z^m dz$$
$$\int z^{n+1} dT = z^{n+1} T - (n+1) \int T z^n dz$$

Hinc cum hae formulae $\int T z^m dz$ et $\int T z^n dz$ valores algebraicos obtinere debeant, hoc per problema quartum duplici modo efficietur.

## COROLL. 1.

39. Patet ergo primo ſi fuerit vel $m = -1$ vel $n = -1$, reductionem per methodum propoſitam perfici non poſſe. Praeterea vero eam quoque locum non habere, niſi formula differentialis $dP^{\frac{n+1}{n-m}} dQ^{\frac{m+1}{m-n}}$ abſolute fuerit integrabilis.

COROL.

## C O R O L L. 2.

40. Quodſi fuerit $m = n$, dummodo vtriusque litterae valor non ſit $= -1$, poſteriori transformatione non erit opus, ſed formulae $\int x^{n+1} d\,P$ et $\int x^{n+1} d\,Q$ immediate ope problematis quarti reduci poterunt.

## E X E M P L V M.

41. *Quaeratur relatio algebraica inter $x$ et $y$, vt hae formulae $\int \frac{y^3 dx}{xx}$ et $\int \frac{dx}{x^3} (xx+yy)^{\frac{3}{2}}$ valores algebraicos obtineant.*

Cum hic ſit $V = \frac{y^3}{xx}$ et $Z = \frac{1}{x^3} (xx+yy)^{\frac{3}{2}}$, vtraque ergo functio V et Z homogenea, illiusque dimenſionum numerus $m = 1$, huius vero $n = 0$, ſi ponatur $y = tx$, fiet $V = x\,t^3$ et $Z = (1+tt)^{\frac{3}{2}}$, et formulae reducendae erunt

$$\int t^3\, x\, dx \quad \text{et} \quad \int dx\, (1+tt)^{\frac{3}{2}}$$

vnde ſit

$$\int t^3\, x\, dx = \tfrac{1}{2} t^3\, xx - \tfrac{3}{2} \int x^2\, tt\, dt$$

$$\int dx.(1+tt)^{\frac{3}{2}} = x(1+tt)^{\frac{3}{2}} - 3 \int x\, t\, dt\, \sqrt{(1+tt)}$$

Ponatur iam $x = \frac{z}{t} \sqrt{(1+tt)}$, fietque

$$\int x^2 tt\, dt = \int zz\, dt (1+tt) = zz(t+\tfrac{1}{3}t^3) - 2\int (t+\tfrac{1}{3}t^3) z\, dz$$

$$\int x\, t\, dt \sqrt{(1+tt)} = \int z\, dt (1+tt) = z(t+\tfrac{1}{3}t^3) - \int (t+\tfrac{1}{3}t^3) dz$$

Sit breuitatis gratia $t + \frac{1}{3}t^3 = u$, et cum formulae reducendae ſint $\int u\,z\,dz$ et $\int u\,dz$, ponatur

$$\int u\, z\, dz = L \quad \text{et} \quad \int u\, dz = M$$

fiet $u = \frac{dL}{z\,dz} = \frac{dM}{dz}$, ideoque $z = \frac{dL}{dM}$.



Si

Si igitur L et M fuerint functiones quaecunque nouae cuiusdam variabilis $s$, aequatio $z = \frac{dL}{dM}$ dabit functionem ipſius $s$ pro $z$, vnde etiam $u = t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{dM}{dz}$ dabitur per $s$; ac propterea pro $t$ reperitur hinc valor in $s$ expreſſus. Hincque porro dabitur per $s$ variabilis $x = \frac{z}{x} \sqrt{(1+tt)}$ et $y = tx$, vnde relatio inter $x$ et $y$ definiri poterit.

Altera ſolutio poſito $\int u\,dz = L$ dabit $\int uz\,dz = \int z\,dL = zL - \int L\,dz$. Sit $\int L\,dz = S$ exiſtente S functione quacunque ipſius $z$, fiet $L = \frac{ds}{dz}$; porroque $u = \frac{dL}{dz} = t + \frac{1}{3}t^3$; $x = \frac{z}{t}\sqrt{(1+tt)}$ et $y = tx$, vnde denuo relatio inter $x$ et $y$ reperitur. Nam ob $t = \frac{y}{x}$ et $z = \frac{xy}{\sqrt{(xx+yy)}}$ hi valores in aequatione $\frac{dL}{dz} = \frac{dds}{dz^2} = \frac{3xxy+y^3}{3x^3}$ ſubſtituti dabunt aequationem inter $x$ et $y$.

## PROBLEMA 9.

42. Si V et Z fuerint vt ante functiones homogeneae ipſarum $x$ et $y$, illa quidem $m$, haec vero $n$ dimenſionum, inuenire relationem algebraicam inter $x$ et $y$, vt hae duae formulae $\int V\,dx$ et $\int Z\,dy$ fiant integrabiles.

## SOLVTIO.

Ponatur vt ante $y = tx$, fietque $V = x^m P$ et $Z = x^n Q$ exiſtentibus P et Q functionibus nouae variabilis $t$, et ob $dy = t\,dx + x\,dt$ formulae reducendae erunt:

$$\int P x^m dx = \frac{1}{m+1}\int x^{m+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{m+1} dP$$

$\int Q x$

$$\int Q x^n dy = \int Q x^n t\, dx + \int Q x^{n+1} dt \quad \text{at}$$
$$\int Q t x^n dx = \tfrac{1}{n+1} Q t x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1} \int x^{n+1} (Q dt + t dQ)$$

vnde habebimus:

$$\int Q x^n dy = \tfrac{1}{n+1} Q t x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1} \int x^{n+1} (t dQ - n Q dt)$$

Atque adeo formulae ad valores gebraicos perducendae erunt $\int x^{m+1} dP$ et $\int x^{n+1} (t\, dQ - n\, Q\, dt)$, quae ponendo $x = \left(\frac{t dQ - n Q dt}{dP}\right)^{\frac{1}{m-n}} z$ reducentur vti in problemate praecedente, dum haec formula differentialis

$$\left(\frac{t dQ - n Q dt}{dP}\right)^{\frac{m+1}{m-n}} dP \text{ fuerit integrabilis.}$$

Vbi quidem iterum excludendi ſunt caſus, quibus vel $m = -1$ vel $n = -1$; Praeterea vero notandum eſt ſi ſit $m = n$, tum vltima transformatione ne opus quidem eſſe, quia formulae $\int x^{m+1} dP$ et $\int x^{n+1} (t dQ - n Q dt)$ ſtatim per problema quartum reduci poſſunt.

## SCHOLION.

43. Atque hi ſunt fere caſus, quibus duae formulae integrales ordinis primi ad valores algebraicos methodo quidem adhuc expoſita reduci poſſunt. Nullum autem eſt dubium, quin haec methodus ad maiorem perfectionis gradum euehi poſſit, vt etiam formulae hic excluſae ad valores algebraicos reduci queant, quod negotium aliis vberius excolendum relinquo. Conſideretur autem potiſſimum caſus harum formularum $\int \frac{y\,dx}{x}$ et $\int \frac{yy\,dx}{x}$, quas generatim quidem nullo adhuc modo ad integrabilitatem reducere potui, etſi non eſt

difficile innumeras relationes inter $x$ et $y$ exhibere, quae propoſito ſatisfaciant. His igitur regulis pro duabus formulis primi ordinis traditis contentus, ad tres pluresve formulas eiusdem ordinis progredior, eos inueſtigaturus caſus, quibus omnes ſimul methodo hactenus expoſita ad valores algebraicos reduci queant, quod quidem ea methodo, qua in ſolutione ſecunda problematis 4 ſum vſus, praeſtari debere animaduerto.

## PROBLEMA 10.

44. Si P, Q, R ſint functiones quaecunque algebraicae ipſius $x$, inuenire relationem algebraicam inter variabiles $x$ et $y$, vt tres hae formulae integrales

$$\int yP\,dx;\ \int yQ\,dx;\ \int yR\,dx$$

valores algebraicos obtineant.

## SOLVTIO.

Ponatur $\int y\,P\,dx = L$ eritque $y = \frac{dL}{P\,dx}$, atque duae reliquae formulae reducendae fient:

$$\int yQ\,dx = \int \tfrac{Q}{P}\,dL = \tfrac{LQ}{P} - \int L\,d.\tfrac{Q}{P}$$

$$\int yR\,dx = \int \tfrac{R}{P}\,dL = \tfrac{LR}{P} - \int L\,d.\tfrac{R}{P}$$

Iam vero hae duae formulae $\int L\,d.\frac{Q}{P}$ et $\int L\,d.\frac{R}{P}$ per problema quartum facile reſoluuntur, idque duplici modo.

I. Priori modo poni oportet:

$\int L\,d.\frac{Q}{P} = M$ et $\int L\,d.\frac{R}{P} = N$, hincque erit:

$L = dM : d.\frac{Q}{P} = dN : \frac{R}{P}$. Vnde elicitur aequatio $\frac{d(Q:P)}{d(R:P)} = \frac{dM}{dN}$, cuius primum membrum cum ſit functio ipſius

ipſius $x$, pro M et N capiantur functiones nouae variabilis $z$, atque per hanc aequationem $x$ definietur in $z$ expreſſum, vnde porro per $z$ dabitur

$$L = \frac{dM}{d(Q:P)} \text{ et } y = \frac{dL}{P\,dx}$$

II. Poſteriori reſolutione vtentes ponamus $\int L\,d.\frac{Q}{P} = M$ vt ſit $L = \frac{dM}{d(Q:P)}$, qui valor in tertia formula ſubſtitutus producet $\int L\,d.\frac{R}{P} = \int dM.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)} = M\frac{d(R:P)}{d(Q:P)} - \int M\,d.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)}$

Ponatur ergo $\int M\,d.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)} = N$ exiſtente N functione quacunque ipſius $x$, eritque $M = \frac{dN}{d.\frac{d(R:P)}{d(Q:P)}}$, vnde pro M inuenitur functio ipſius $x$, qua inuenta erit $L = \frac{dM}{d(Q:P)}$ ac denique $y = \frac{dL}{P\,dx}$. Tum vero valores algebraici trium formularum propoſitarum erunt.

$$\int yP\,dx = L$$

$$\int yQ\,dx = \frac{LQ}{P} - M$$

$$\int yR\,dx = \frac{LR}{P} - M\frac{d(R:P)}{d(Q:P)} - N$$

## COROLL. 1.

45. Cum in priori ſolutione pro litteris M et N functiones quaecunque ipſius $z$ accipi queant, ſi iis valores transcendentes tribuantur, ita tamen vt $\frac{dM}{dz}$ et $\frac{dN}{dz}$ fiant functiones algebraicae, effici poterit vt trium formularum integralium propoſitarum duae $\int yQ\,dx$ et $\int yR\,dx$ a datis quadraturis pendeant. Quod etiam per probl. 2 ita expediri poterit, vt vtraque tot quot lubuerit caſibus nihilominus valores algebraicos adipiſcatur.

### COROLL. 2.

46. Sin autem ſolutionem poſteriorem adhibeamus, quoniam vnica littera N arbitrio noſtro relinquitur, ſi pro ea functio transcendens ipſius $x$ accipiatur, vnius tantum formulae propoſitae integratio datam quadraturam inuoluet, reliquae vero duae neceſſario valores algebraicos obtinebunt.

### COROLL. 3.

47. Patet etiam ſi Y fuerit functio quaecunque ipſius $y$, ſimili modo has tres formulas:

$$\int Y P dx; \int Y Q dx; \int Y R dx$$

ad valores algebraicos reduci. Quin etiam eadem reductio locum habebit, ſi Y ſit functio quaecunque ambarum variabilium $x$ et $y$.

### PROBLEMA 11.

48. Si P, Q, R fuerint functiones quaecunque algebraicae variabilis $x$, inuenire relationem algebraicam inter $x$ et $y$, vt hae tres formulae integrales:

$$\int P dy; \int Q dy; \int R dy$$

valores algebraicos obtineant.

### SOLVTIO.

Formulae iſtae per lemma praemiſſum transformantur in ſequentes.

$$\int P dy = Py - \int y dP$$
$$\int Q dy = Qy - \int y dQ$$
$$\int R dy = Ry - \int y dR$$

Quaeſtio

Quaeſtio ergo redit ad has tres formulas:

$\int y\,dP$; $\int y\,dQ$; $\int y\,dR$

algebraicas efficiendas, quae cum ſimiles ſint iis, quae in probl. praec. ſunt tractatae, reſolutio nullam habebit difficultatem, atque adeo duplici modo abſolui poterit.

## COROLL. 1.

49. Quin etiam ſi ordo inter has formulas immutetur, quoniam perinde eſt a quanam earum operatio incipiatur, nouem omnino ſolutiones exhiberi poſſunt. Incipiendo enim a prima ponendo $\int y\,dP = L$, ſolutio prior ante tradita vnam praebet ſolutionem, poſterior vero duas, prout duae reliquae formulae ſumuntur, vel $\int y\,dQ$ et $\int y\,dR$, vel ordine inuerſo $\int y\,dR$ et $\int y\,dQ$, ſicque hinc tres ſolutiones impetrantur. Atque cum operatio a qualibet harum formularum inchoari queat, omnino nouem ſolutiones exhiberi poterunt.

## COROLL. 2.

50. In hac ergo methodo perinde eſt, ſiue formula quaepiam propoſita ſit $\int yP\,dx$ ſiue $\int P\,dy$, quia poſterior $\int P\,dy$ facile ad formam prioris $\int y\,dP$ reducitur. Hincque inpoſterum nullum amplius diſcrimen inter duas huiusmodi formulas conſtituam, ne praeter neceſſitatem hanc tractationem prolixiorem reddam.

## COROLL. 3.

51. Perinde ergo problema reſoluetur, ſi ad valores algebraicos reduci debeant huiusmodi formulae ternae

vel

vel $\int y P dx$; $\int y Q dx$; $\int R dy$
vel $\int y P dx$; $\int Q dy$; $\int R dy$

Superfluum ergo foret diuerſa hinc problemata conſtituere.

## PROBLEMA 12.

52. Ad valores algebraicos reducere quatuor huiusmodi formulas integrales:

$$\int y P dx; \quad \int y Q dx; \quad \int y R dx; \quad \int y S dx$$

in quibus litterae P, Q, R, S denotent functiones quascunque algebraicas ipſius $x$.

## SOLVTIO.

Incipiatur operatio a quacunque harum quatuor formularum propoſitarum, ponendo $\int y P dx = L$, vt ſit $y = \frac{dL}{P dx}$, atque tres reliquae formulae transformabuntur ſequenti modo:

$$\int y Q dx = \int \tfrac{Q}{P} dL = \tfrac{LQ}{P} - \int L\, d. \tfrac{Q}{P}$$
$$\int y R dx = \int \tfrac{R}{P} dL = \tfrac{LR}{P} - \int L\, d. \tfrac{R}{P}$$
$$\int y S dx = \int \tfrac{S}{P} dL = \tfrac{LS}{P} - \int L\, d. \tfrac{S}{P}$$

Cum igitur nunc ad valores algebraicos reducendae ſint hae tres formulae:

$$\int L\, d. \tfrac{Q}{P}; \quad \int L\, d. \tfrac{R}{P}; \quad \int L\, d. \tfrac{S}{P}$$

haeque congruant cum iis, quae in probl. 10^mo ſunt pertractatae, reſolutio erit in promtu; et quoniam hic nouem diuerſae ſolutiones ſuppeditantur, totidemque reperiantur, a quanam alia quatuor formularum propoſitarum initium capiatur, omnino huius problematis quater nouem, ſeu 36 ſolutiones exhiberi poterunt.

COROL.

### COROLL. 1.

53. Si vna quaedam formularum propoſitarum, veluti $\int y S\, dx$, a data quadratura pendere debeat, ea in operatione ad finem vsque eſt reſeruanda, id quod 12 modis diuerſis fieri poteſt. Sin autem duae formulae datae, veluti $\int y R\, dx$ et $\int y S\, dx$, a datis quadraturis pendere debeant, hoc nonniſi duobus modis diuerſis praeſtabitur.

### COROLL. 2.

54. Hinc etiam patet, eundem ſoluendi modum ad quinque, pluresque, quotquot proponantur, ſimiles formulas extendi, dummodo quaelibet formula habeat ſpeciem $\int y P\, dx$ vel $\int P\, dy$, exiſtente P functione ipſius $x$, ita vt in ſingulis formulis altera variabilis $y$ nonniſi vnicam obtineat dimenſionem.

### COROLL. 3.

55. Quemadmodum in caſu duarum huiusmodi formularum propoſitarum reperiri poſſunt 3 ſolutiones et in caſu trium formularum 9 ſolutiones; ſic in caſu 4 formularum inueniuntur $4 \cdot 9 = 36$ ſolutiones. Atque porro in caſu 5 formularum $5 \cdot 36 = 180$ ſolutiones, in caſu 6 formularum $6 \cdot 180 = 1080$ ſolutiones, et ita porro.

### PROBLEMA 13.

56. Si propoſitae fuerint quotcunque huiusmodi formulae integrales $\int Z\, dx$ vel $\int Z\, dy$, in quibus omnibus $Z$ ſit functio homogenea ipſarum $x$ et $y$, et

in ſingulis idem dimenſionum numerus $n$ deprehendatur; inuenire relationem algebraicam inter $x$ et $y$, vt ſingularum harum formularum valores prodeant algebraici.

## SOLVTIO.

Cum Z ſit functio homogenea $n$ dimenſionum ipſarum $x$ et $y$, ſi ponatur $y = t\,x$, ea tranſibit in huiusmodi expreſſionem $x^n\,T$, exiſtente T functione quapiam ipſius $t$ tantum; ideoque quaelibet formula huius generis $\int Z\,d\,x$ reducitur ſequenti modo:

$$\int Z\,d\,x = \int T\,x^n d\,x = \tfrac{1}{n+1}\,T\,x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1}\int x^{n+1}\,d\,T$$

Deinde ob $d\,y = t\,d\,x + x\,d\,t$ formulae huius generis $\int Z\,d\,y$ ſimili modo transformabuntur:

$$\int Z\,dy = \int T\,x^n\,(t\,dx + x\,dt) = \int x^{n+1} T\,dt + \int T\,t\,x^n dx$$

at $\int T\,t\,x^n dx = \tfrac{1}{n+1}\,T\,t\,x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1}\int x^{n+1}(T\,dt + t\,d T)$

vnde fiet

$$\int Z\,d\,y = \tfrac{1}{n+1}\,T\,t\,x^{n+1} - \tfrac{1}{n+1}\int x^{n+1}\,(t\,d\,T - n\,T\,d\,t)$$

Quare quotcunque proponantur formulae integrales, vel huius $\int Z\,d\,x$, vel huius $\int Z\,d\,y$ ſpeciei, quaeſtio reuocabitur ad totidem formulas iſtius ſpeciei $\int x^{n+1}\Theta\,d\,t$, exiſtente $\Theta$ functione ipſius $t$, quae poſito $x^{n+1} = u$ abeunt in $\int u\,\Theta\,d\,t$. Quotcunque autem huiusmodi formulae $\int u\,\Theta\,d\,t$ fuerint propoſitae, eae omnes per praecepta hactenus tradita ad valores algebraicos reduci poterunt.

COROL.

## COROLL. 1.

57. Excipi tamen debent ii caſus, quibus functionum Z numerus dimenſionum $n$ eſt $= -1$, ſeu $n + 1 = 0$, quoniam his caſibus reductiones hic adhibitae non ſuccedunt.

## COROLL. 2.

58. Patet etiam, quaecunque et quotcunque fuerint formulae propoſitae, dummodo eae omnes per ſubſtitutionem aut transformationem quampiam ad huiusmodi formas $\int u\, \Theta\, dt$ reduci queant, eas omnes ſemper integrabiles reddi poſſe.

## SCHOLION.

59. Vis igitur methodi hactenus expoſitae in hoc conſiſtit, vt quotquot proponantur formulae integrales duas variabiles $x$ et $y$ inuoluentes, dummodo in ſingulis altera variabilis $y$ vnicam obtineat dimenſionem eiusue differentiale $dy$, reductio ad valores algebraicos ſemper perfici queat; hoc ergo euenit, ſi ſingulae formulae fuerint vel huius generis $\int y\, X\, dx$, vel huius $\int X\, dy$, propterea quod huius integratio reuocatur ad hanc $\int y\, dX$, ſiquidem X ſit functio quaecunque ipſius $x$. Atque hi ſunt caſus, quibus duas pluresue formulas integrales primi ordinis mihi quidem adhuc ad valores algebraicos reducere contigit. Dantur vero etiam formulae ſecundi ſuperiorumque ordinum, quas facile ad formulas primi ordinis formae $\int y\, X\, dx$ reducere licet, ex quo, ſi eiusmodi formulae integrales ſuperiorum ordinum occurrant, reſolutio problematum hactenus allatorum perinde ſuccedet.

cedet. Eas igitur formulas ſuperiorum ordinum, quae huiusmodi reductionem admittunt, hic indicari conueniet.

## PROBLEMA. 14.

60. Si P ſit functio quaecunque ipſius $x$, elementumque $dx$ ſumatur conſtans, reducere integrationem huiusmodi formularum integralium $\int\frac{Pddy}{dx}$, $\int\frac{Pd^3y}{dx^2}$, $\int\frac{Pd^4y}{dx^3}$ et ingenere huius $\int\frac{Pd^ny}{dx^{n-1}}$ ad integrationem formulae primi ordinis huiusmodi $\int yQdx$, exiſtente Q functione ipſius $x$.

## SOLVTIO.

Conſideretur formula prima, eaque per lemma ita reducetur:

$$\int\frac{Pddy}{dx}=\frac{Pdy}{dx}-\int dy.\frac{dP}{dx}\text{ at }\int dy.\frac{dP}{dx}=\frac{ydP}{dx}-\int\frac{yddP}{dx};$$

ſicque erit:

$$\int\frac{Pddy}{dx}=\frac{Pdy}{dx}-\frac{ydP}{dx}+\int\frac{yddP}{dx}.$$

At $\frac{ddP}{dx}$ eſt expreſſio differentialis formae $Qdx$, ideoque formula $\int\frac{Pddy}{dx}$ reducta eſt ad formulam $\int yQdx$.

Simili modo formula ſecunda reducitur:

$$\int\frac{Pd^3y}{dx^2}=\frac{Pddy}{dx^2}-\int\frac{dPddy}{dx^2};\text{ at}$$

$$\int\frac{dPddy}{dx^2}=\frac{dPdy}{dx^2}-\frac{yddP}{dx^2}+\int\frac{yd^3P}{dx^2},\text{ ideoque}$$

$$\int\frac{Pd^3y}{dx^2}=\frac{Pddy-dPdy+yddP}{dx^2}-\int\frac{yd^3P}{dx^2},$$

vbi $\int\frac{yd^3P}{dx^2}$ eſt iterum formae $\int yQdx$.

Pro tertia formula propoſita erit:

$\int Pd^4y$

$\int \frac{P d^4 y}{d x^3} = \frac{P d^3 y}{d x^3} - \int \frac{d P d^3 y}{d x^3}$; at per reduct: praeced.

$\int \frac{d P d^3 y}{d x^3} = \frac{d P d d y - d y d d P + y d^3 P}{d x^3} - \int \frac{y d^4 P}{d x^3}$; ergo

$\int \frac{P d^4 y}{d x^3} = \frac{P d^3 y - d P d d y + d y d d P - y d^3 P}{d x^3} + \int \frac{y d^4 P}{d x^3}$,

vbi iterum $\int \frac{y d^4 P}{d x^3}$ eſt formae $\int y Q d x$.

Hinc colligitur fore vlterius progrediendo:

$\int \frac{P d^5 y}{d x^4} = \frac{P d^4 y - d P d^3 y + d d P d d y - d y d^3 P + y d^4 P}{d x^4} - \int \frac{y d^5 P}{d x^4}$

vnde etiam generatim patet, hac ratione iſtius formulae $\int \frac{P d^n y}{d x^{n-1}}$ integrationem reduci ad integrationem huius formulae $\int \frac{y d^n P}{d x^{n-1}}$, ſoreque ſemper hanc expreſſionem huius formae $\int y Q d x$, eſt enim $\frac{d^n P}{d x^n}$ functio algebraica ipſius $x$, eiusque loco ſi ponatur Q erit $\frac{d^n P}{d x^{n-1}} = Q d x$.

## COROLL. 1.

61. Omnes ergo reductiones, quae ſupra circa formulas huiusmodi $\int y Q d x$ ſunt exhibitae, eodem ſuccedunt modo, ſi huiusmodi formulae $\left(\int \frac{P d^n y}{d x^{n-1}}\right)$ proponantur; vnde opus non eſt problemata praecedentia pro huiusmodi formulis altiorum ordinum reſoluere.

## COROLL. 2.

62. Si expreſſio $\frac{d^n P}{d x^n}$ euaneſcat, id erit indicio, formulam $\int \frac{P d^n y}{d x^n}$ eſſe abſolute integrabilem; ea ergo

 his

his caſibus in noſtris problematibus locum non habebit. Hoc autem euenit, ſi P fuerit ipſius $x$ huiusmodi functio $P = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \dots + \mu x^{n-1}$ tum enim $\int \frac{P\, d^n y}{d x^n}$ integrationem abſolute admittet.

## COROLL. 3.

63. Formulae ergo integrabiles cum ſuis integralibus erunt pro variis ipſius $n$ valoribus ſequentes:

$$\int \alpha\, dy = \alpha y$$

$$\int \frac{(\alpha + \beta x)\, ddy}{dx} = (\alpha + \beta x) \frac{dy}{dx} - \beta y$$

$$\int \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)\, d^3 y}{dx^2} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2) \frac{ddy}{dx^2} - (\beta + 2\gamma x) \frac{dy}{dx} + 2\gamma y$$

$$\int \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)\, d^4 y}{dx^3} = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) \frac{d^3 y}{dx^3} - (\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2) \frac{ddy}{dx^2} + (2\gamma + 6\delta x) \frac{dy}{dx} - 6\delta y$$

## SCHOLION.

64. Progrediamur ergo ad formulas ordinis ſecundi, cum reductioni earum, quae ſunt primi ordinis, iam tantum ſimus immorati, quantum quidem profectus in hac methodo facti adhuc permiſerunt. Quoniam vero ad ordinem ſecundum eas retulimus formulas, in quibus vtriusque variabilis $x$ et $y$ differentialia $dx$ et $dy$ inſunt, eae ſine dubio ſunt ſimpliciſſimae, in quibus haec bina differentialia plus vna dimenſione non obtinent, cuiusmodi in genere eſt haec formula $\int (V\, dx + Z\, dy)$, vbi V et Z ſint functiones quaecunque ipſarum $x$ et $y$. Nam ſi vnicum adſit differentiale $dy$, quanquam inde poſito $dy = p\, dx$, littera $p$ in functionem ingreditur, tamen manifeſtum eſt, binas variabiles $x$ et $y$ eſſe commuta-

muta-

mutabiles, atque formulas $\int Z\,dy$ perinde tractari poſſe, ac $\int Z\,dx$. Quibus ergo caſibus huiusmodi formulis $\int(V\,dx + Z\,dy)$ valores algebraicos conciliare potuerim, explicabo.

PROBLEMA 15.

65. Si V et Z denotent functiones ipſarum $x$ et $y$, inuenire relationem algebraicam inter $x$ et $y$, vt haec formula $\int(V\,dx + Z\,dy)$ algebraicum obtineat valorem.

SOLVTIO.

I. Diſpiciatur primo, vtrum altera pars $\int V\,dx$, vel $\int Z\,dy$, per lemma reduci poſſit, vt fiat
vel $\int V\,dx = P - \int Q\,dy$,
vel $\int Z\,dy = R - \int S\,dx$.
Si alterum enim ſuccedit, ſolutio erit facilis: priori enim caſu habebitur.
$\int(V\,dx + Z\,dy) = P + \int(Z - Q)\,dy$, poſteriori vero
$\int(V\,dx + Z\,dy) = R + \int(V - S)\,dx$;
Vtrauis autem haec formula nullam habet difficultatem per problema 3.

II. Si hoc modo reductio inueniri nequeat, indagetur functio algebraica ipſarum $x$ et $y$, quae ſit $= P$, vt $\frac{V\,dx + Z\,dy}{P}$ fiat differentiale functionis cuiuspiam algebraicae Q ipſarum $x$ et $y$, hoc enim caſu fiet $\int(V\,dx + Z\,dy) = \int P\,d\,Q$, quae formula nulla difficultate ad integrabilitatem perducitur per problema 3.

III. Saepe etiam huiusmodi functio algebraica ipſarum $x$ et $y$ puta T inueniri poteſt, cuius differentiali exiſtente $= P\,dx + Q\,dy$, ſi ponatur

$\int(V\,dx$

$\int (V\,dx + Z\,dy) = T + \int ((V - P)\,dx + (Z - Q)\,dy)$ vt haec formula modo vel primo, vel ſecundo, reductionem admittat.

IV. Interdum quoque iuuabit, in locum vnius vel ambarum variabilium $x$ et $y$ vnam duasue nouas $t$ et $q$ introducere, ponendis $x$ et $y$ aequalibus functionibus quibuspiam harum duarum nouarum variabilium $t$ et $u$, ita vt facta ſubſtitutione formula huiusmodi obtineatur: $\int (V\,dz + Z\,dy) = \int (P\,dt + Q\,du)$, vbi iam P et Q ſunt functiones ipſarum $t$ et $u$, quae aliquo expoſitorum modorum reductionem admittat.

V. Caſus adhuc ſingularis eſt memorandus, quo V et Z ſunt functiones homogeneae ipſarum $x$ et $y$ eiusdem ambae numeri dimenſionum, qui ſit $= n$. Poſito enim $y = tx$ fiet $V = Px^m$ et $Z = Qx^n$, exiſtentibus P et Q functionibus ipſius $t$. Tum ob $dy = t\,dx + x\,dt$; formula propoſita tranſibit in hanc

$$\int (P\,x^n dx + Q\,t\,x^n dx + Q\,x^{n+1} dt)$$

at $\int (P + Qt)\,x^n dx = \frac{1}{n+1}(P + Qt)\,x^{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1} d(P + Qt)$ vnde reductio reuocatur ad huiusmodi formam $\int x^{n+1} S\,dt$, niſi ſit $n = -1$, exiſtente S functione ipſius $t$.

## SCHOLION.

66. Sufficiat has operationes in genere explicaſſe, quoniam exempla, quae vſum quempiam memorabilem habere videantur, non ſuccurrunt. Interim tamen notandum eſt, plurima exempla proponi poſſe, quae vel difficulter, vel plane non, per vllam harum operationum reduci queant. Cuiusmodi eſt, ſi relatio inter $x$ et $y$ quaerenda ſit, vt haec formula integralis $\int (\frac{y\,dx}{x} + \frac{dy}{y})$ valorem

valorem algebraicum obtineat, neque enim video, quomodo huic quaeſtioni ſatisfaciendum ſit. Quamobrem multo minus talia attingo problemata, in quibus duae pluresue huiusmodi formulae ad integrabilitatem perduci debeant. Neque etiam formulas ſuperiorum ordinum generaliter pertractare licebit, praeter caſum in ſequenti problemate contentum.

## PROBEMA 16.

67. Si Z ſit functio nullius dimenſionis ipſarum $dx$ et $dy$, ita vt ipſae quantitates finitae $x$ et $y$ in eam non ingrediantur, ad integrabilitatem reducere hanc formulam $\int Z dx$.

## SOLVTIO.

Cum formula differentialis $Zdx$ ita ſit comparata, vt praeter quantitates conſtantes nonniſi differentialia $dx$ et $dy$ contineat, quae propterea vnam dimenſionem adimplebunt, cuiusmodi ſunt hae formulae: $\frac{dy^2}{dx}$; $\sqrt{(adx^2 + bdxdy + cdy^2)}$; $\frac{adx^2 + bdy^2}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ etc. ponatur $dy = pdx$, atque formula propoſita $\int Z dx$ induet hanc ſpeciem $\int P dx$, ita vt P fiat functio quantitatis $p$ tantum, neque $x$ neque $y$ inuoluens. Efficiendum ergo erit, vt non ſolum haec formula $\int P dx$, ſed etiam ob $dy = pdx$ haec $\int pdx$, algebraicum nanciſcatur valorem, quod per problema 4. ita duplici modo praeſtabitur. Cum enim ſit

$$\int Z dx = \int P dx = Px - \int x dP$$

$$y = \int p dx = px - \int x dp$$

Fiat primo:

$$\int x\,dP = M \text{ et } \int x\,dp = N,$$

eritque $x = \frac{dM}{dP} = \frac{dN}{dp}$, vnde fit $\frac{dP}{dp} = \frac{dM}{dN}$, et quia $\frac{dP}{dp}$ eſt functio ipſius $p$, inde valor ipſius $p$ erui debet, quo inuento habebitur $x = \frac{dM}{dP}$, ſeu $x = \frac{dN}{dp}$, ac deinceps $y = px - N$: qui valores praebebunt $\int Z\,dx = Px - M$.

Pro altera ſolutione ponatur:

$\int x\,dP = M$, vt ſit $x = \frac{dM}{dP}$, et $\int x\,dp = \int \frac{dp}{dP}.\, dM = M.\frac{dp}{dP} - \int M\,d.\frac{dp}{dP}$. Iam ponatur $\int M\,d.\frac{dp}{dP} = R$ functioni ipſius $p$ cuicunque, ac reperietur $M = dR : d.\frac{dp}{dP}$, quo valore ipſius M inuento, prodibit porro:

$$x = \frac{dM}{dP}\,;\; y = px - \frac{M\,dp}{dP} + R,$$

vnde fit $\int Z\,dx = Px - M$.

Vel ponatur $\int x\,dp = N$, et ob $x = \frac{dN}{dp}$, fiet $\int x\,dP = \int dN.\frac{dP}{dp} = N.\frac{dP}{dp} - \int N\,d.\frac{dP}{dp}$. Sit $\int N\,d.\frac{dP}{dp} = S$ erit $N = dS : d.\frac{dP}{dp}$; hincque $x = \frac{dN}{dp}$ et $y = px - N$ ex quibus efficitur $\int Z\,dx = Px - \frac{N\,dP}{dp} + S$.

## COROLLARIVM.

68. Simili modo ſolutio exhiberi poterit, ſi duae pluresue huiusmodi formulae $\int Z\,dx$ proponantur, quibus valores algebraici conciliari debeant. Poſito enim $dy = p\,dx$, praeter hanc formulam $\int p\,dx$, duae pluresue huiusmodi $\int P\,dx$, $\int Q\,dx$, etc. vbi P et Q etc. ſint functiones ipſius $p$, integrabiles erunt efficiendae, quod per methodos ſupra traditas facile praeſtatur.

SCHO-

## SCHOLION.

69. Vt igitur finem huic diſquiſitioni imponam, eximium eius vſum in ſoluendis praecipuis huius generis problematibus, quae quidem adhuc ſunt agitata, oſtendam. Verſantur autem haec problemata potiſſimum circa curuas rectificabiles algebraicas, quamobrem ex methodis hactenus traditis plures deriuabo regulas, quarum ope tot, quot lubuerit, curuas algebraicas rectificabiles reperire liceat, vnde ſimul patebit, quomodo eiusmodi curuae algebraicae ſint inueniendae, quarum integratio a data pendeat quadratura, ita vt omnia problemata, quae ope cuiuspiam quadraturae ſint conſtructa, facile per rectificationem curuae algebraicae expediri posſint. Tum vero non magis erit difficile eiusmodi curvas algebraicas exhibere, quarum rectificatio indefinita a data quadratura pendeat, quae tamen nihilo minus vnum pluresue imo praeciſe tot, quot lubuerit, habeant arcus definitos algebraice aſſignabiles. Denique ſolutionem mei illius problematis de duabus curuis, in quibus arcuum communi abſciſſae reſpondentium ſumma fiat algebraica, ex his principiis deducam.

## PROBLEMA 17.

70. Inuenire curuas algebraicas rectificabiles, ſeu quarum omnes arcus algebraice exhiberi queant.

## SOLVTIO.

Sint curuae coordinatae orthogonales $x$ et $y$, arcusque his coordinatis reſpondens $= z$. Primo igitur

 quae-

quaeritur aequatio algebraica inter $x$ et $y$, deinde valor ipſius $z$ inde emergens debet eſſe algebraicus. Cum igitur ſit $z = \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, haec formula integrabilis erit reddenda; quod ſequentibus modis praeſtabitur.

## I.

Ponatur $dy = p\,dx$, atque hae duae formulae

$$y = \int p\,dx \text{ et } z = \int dx \sqrt{(1 + pp)}$$

algebraicae ſunt reddendae. Cum igitur ſit

$$y = px - \int x\,dp$$

$$z = x\sqrt{(1 + pp)} - \int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1 + pp)}}$$

ſumantur nouae cuiusdam variabilis $u$ functiones quaecunque algebraicae P et Q, ponaturque

$$\int x\,dp = \mathrm{P} \text{ et } \int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \mathrm{Q}$$

erit $x = \frac{d\mathrm{P}}{dp} = \frac{d\mathrm{Q}\sqrt{(1+pp)}}{p\,dp}$, vnde fit

$$p\,d\mathrm{P} = d\mathrm{Q}\sqrt{(1 + pp)}, \text{ ideoque } p = \frac{d\mathrm{Q}}{\sqrt{(d\mathrm{P}^2 - d\mathrm{Q}^2)}}$$

Dabitur ergo $p$ per functionem quandam ipſius $u$, quae ob $\frac{d\mathrm{P}}{du}$ et $\frac{d\mathrm{Q}}{du}$ ideoque $\frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{Q}}$ quantitates algebraicas, ipſa erit algebraica $p = \frac{d\mathrm{Q}}{\sqrt{(d\mathrm{P}^2 - d\mathrm{Q}^2)}}$, ex qua habebitur porro:

$$x = \frac{d\mathrm{P}}{dp};\; y = px - \mathrm{P};\; \text{et } z = x\sqrt{(1+pp)} - \mathrm{Q}.$$

Seu ſit $\mathrm{Q} = u$ et $\mathrm{P} = \mathrm{V}$, et quia poſito $du$ conſtante eſt $dp = \frac{-du\,d\mathrm{V}\,dd\mathrm{V}}{(d\mathrm{V}^2 - du^2)^{\frac{3}{2}}}$ ob $p = \frac{du}{\sqrt{(d\mathrm{V}^2 - du^2)}}$ habebitur:

$$x = \frac{-(d\mathrm{V}^2 - du^2)^{\frac{3}{2}}}{du\,dd\mathrm{V}}$$

$$y = \frac{-(d\mathrm{V}^2 - du^2)}{dd\mathrm{V}} - \mathrm{V}$$

et

et $z = \frac{-dV(dV^2 - du^2)}{du\,ddV} - u$.

Poſito autem contra $P = u$ et $Q = V$, vt $V$ ſit functio quaecunque ipſius $u$, ob $p = \frac{dV}{\sqrt{(du^2 - dV^2)}}$

et $dp = \frac{du^2\,ddV}{(du^2 - dV^2)^{\frac{3}{2}}}$ poſito $du$ conſtante, erit

$$x = \frac{(du^2 - dV^2)^{\frac{3}{2}}}{du\,ddV}$$

$$y = \frac{dV(du^2 - dV^2)}{du\,ddV} - u$$

$$z = \frac{du^2 - dV^2}{ddV} - V$$

II.

Poſito vt ante $dy = p\,dx$, ſit $\int x\,dp = M$, ideoque $x = \frac{dM}{dp}$, vnde fit

$$\int \frac{xp\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = \int \frac{p\,dM}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{pM}{\sqrt{(1+pp)}} - \int \frac{M\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

Ponatur $\int \frac{M\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = P$ functioni cuicunque ipſius $p$, ſietque $M = \frac{dP}{dp}(1+pp)^{\frac{3}{2}}$, vnde erit porro

$$x = \frac{dM}{dp};\ y = px - M;$$

$$\text{et } z = x\sqrt{(1+pp)} = \frac{Mp}{\sqrt{(1+pp)}} + P.$$

Seu poſito $dp$ conſtante ob $dM = \frac{ddP}{dp}(1+pp)^{\frac{3}{2}} + 3\,pdP$ $\sqrt{(1+pp)}$ erit:

$$x = \frac{ddP}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} + \frac{3pdP}{dp}\sqrt{(1+pp)}$$

$$y = \frac{pddP}{dp^2}(1+pp)^{\frac{3}{2}} + \frac{(2pp-1)dP}{dp}\sqrt{(1+pp)}$$

$$z = \frac{ddP}{dp^2}(1+pp)^2 + \frac{2p(1+pp)dP}{dp} + P.$$

III.

Sit $\int \frac{xpdp}{\sqrt{(1+pp)}} = N$, erit $x = \frac{dN\sqrt{(1+pp)}}{pdp}$, ideoque $\int xdp = \int \frac{dN}{p}\sqrt{(1+pp)} = \frac{N}{p}\sqrt{(1+pp)} + (\int \frac{Ndp}{pp\sqrt{(1+pp)}})$ Ponatur $\int \frac{Ndp}{pp\sqrt{(1+pp)}} = P$ functioni ipſius $p$, eritque $N = (\frac{ppdP\sqrt{(1+pp)}}{dp})$, ex quo valore erit porro: $x = \frac{dN\sqrt{(1+pp)}}{pdp}$; $y = px - \frac{N}{p}\sqrt{(1+pp)} - P$ et $z = x\sqrt{(1+pp)} - N$ Poſito autem $dp$ conſtante ob $dN = \frac{ppddP}{dp}\sqrt{(1+pp)}$ $+ (\frac{pdP(2+3pp)}{\sqrt{(1+pp)}})$ erit:

$$x = \frac{pddP(1+pp)}{dp^2} + \frac{dP(2+3pp)}{dp}$$

$$y = \frac{ppddP(1+pp)}{dp^2} + \frac{pdP(1+2pp)}{dp} - P$$

$$z = \frac{pddP(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp^2} + \frac{2dP(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$$

IV.

### IV.

Ponatur $dy = \frac{dx(qq-1)}{2q}$, erit $dz = \frac{dx(qq+1)}{2q}$; Hinc fit $z+y = \int q\,dx$ et $z-y = \int\frac{dx}{q}$; duae ergo hae formulae integrabiles ſunt reddendae. Ponatur

$$\int q\,dx = qx - \int x\,dq = qx - M$$

$$\int\frac{dx}{q} = \frac{x}{q} + \int\frac{x\,dq}{qq} = \frac{x}{q} + N$$

vt ſit $x = \frac{dM}{dq} = \frac{qq\,dN}{dq}$; ergo $q = \sqrt{\frac{dM}{dN}}$

Sint iam M et N functiones quaecunque ipſius $u$, et ob $dq = \frac{dN\,ddM - dM\,ddN}{2dN\sqrt{dM\,dN}}$ erit:

$$x = \frac{2dM\,dN\sqrt{dM\,dN}}{dN\,ddM - dM\,ddN}$$

$$z+y = \frac{2dM^2\,dN}{dN\,ddM - dM\,ddN} - M$$

$$z-y = \frac{2dM\,dN^2}{dN\,ddM - dM\,ddN} + N$$

ergo $y = \frac{dM\,dN(dM - dN)}{dN\,ddM - dM\,ddN} - \frac{M-N}{2}$

et $z = \frac{dM\,dN(dM + dN)}{dN\,ddM - dM\,ddN} - \frac{M+N}{2}$

### V.

Iisdem poſitis fiat $\int x\,dq = M$, vt ſit $\int q\,dx = qx - M$, erit $x = \frac{dM}{dq}$, et $\int\frac{dx}{q} = \frac{x}{q} + \int\frac{dM}{qq} = \frac{x}{q} + \frac{M}{qq} + 2\int\frac{M\,dq}{q^3}$. Iam ſit $\int\frac{M\,dq}{q^3} = Q$, ideoque $M = \frac{q^3\,dQ}{dq}$, quo valore per $q$ inuento, cum Q ſit functio ipſius $q$, erit $x = \frac{dM}{dq}$; $z+y = qx - M$ et $z-y = \frac{x}{q} + \frac{M}{qq} + 2Q$, ſeu ob $dM = \frac{q^3\,ddQ}{dq} + 3qq\,dQ$, erit

$$x = \frac{q^3\,ddQ}{dq^2} + \frac{3qq\,dQ}{dq}$$

$$z+y = \frac{q^4\,ddQ}{dq^2} + \frac{2q^3\,dQ}{dq}$$

$$z-y = \frac{qq\,ddQ}{dq^2} + \frac{4q\,dQ}{dq} + 2Q$$

hinc-

hincque propterea

$$y = \frac{qq(qq-1)ddQ}{2dq^2} + \frac{q(qq+2)dQ}{dq} - Q$$
$$z = \frac{qq(qq+1)ddQ}{2dq^2} + \frac{q(qq+2)dQ}{dq} + Q$$

## VI.

Vel fiat $\int \frac{x\,dq}{qq} = N$, vt habeatur $x = \frac{qq\,dN}{dq}$ et $\int x\,dq = \int qq\,dN = qq\,N - 2\int N\,q\,dq$. Iam ponatur $\int N\,q\,dq = Q$ exiſtente Q functione quacunque ipſius $q$, atque erit $N = \frac{dQ}{q\,dq}$, $dN = \frac{ddQ}{q\,dq} - \frac{dQ}{qq}$

ergo $x = \frac{q\,ddQ}{dq^2} - \frac{dQ}{dq}$; et $\int x\,dq = \frac{q\,dQ}{dq} - 2\,Q$

vnde fiet $z + y = \frac{qq\,ddQ}{aq^2} - \frac{2q\,dQ}{dq} + 2\,Q$

et $z - y = \frac{ddQ}{dq^2}$

Quamobrem nanciſcemur has formulas:

$$x = \frac{q\,ddQ}{dq^2} - \frac{dQ}{dq}$$
$$y = \frac{(qq-1)ddQ}{2dq^2} - \frac{q\,dQ}{dq} + Q$$
$$z = \frac{(qq+1)ddQ}{2dq^2} - \frac{q\,dQ}{dq} + Q$$

## VII.

Ad alias formulas inueniendas ponamus:

$$dx = 2p\,du;\; dy = du(pp-1) \text{ et } dz = du(pp+1)$$

eritque:

$$x = 2\int p\,du;\; y + z = 2\int pp\,du;\; z - y = 2u$$

ergo quaeſtio ad has duas formulas reducitur:

$$\int p\,du = pu - \int u\,dp;\; \int pp\,du = ppu - 2\int up\,dp.$$

Sit nunc $\int u\,dp = M$, et $\int up\,dp = N$, erit:

$u = \frac{dM}{dp} = \frac{dN}{p\,dp}$, ideoque $p = \frac{dN}{dM}$ et $dp = \frac{dM\,ddN - dN\,ddM}{dM^2}$

vnde $u = \frac{dM^3}{dM\,ddN - dN\,ddM} = \frac{z-y}{2}$

Porro

Porro eſt $\int p\,du = \frac{x}{2} = \frac{dM^2 dN}{dM\,ddN - dN\,ddM} - M$, et

$\int pp\,du = \frac{z+y}{2} = \frac{dM\,dN^2}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2N$; ergo

$x = \frac{2dM^2 dN}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2M$; $y = \frac{dM(dN^2 - dM^2)}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2N$

atque $z = \frac{dM(dN^2 + dM^2)}{dM\,ddN - dN\,ddM} - 2N$.

Si elementum $dM$ ſumatur conſtans, erit

$$x = \frac{2dM\,dN}{ddN} - 2M$$
$$y = \frac{dN^2 - dM^2}{ddN} - 2N$$
$$z = \frac{dN^2 + dM^2}{ddN} - 2N$$

## VIII.

In praecedente ſolutione ponatur, vt ante, $\int u\,dp = M$ ſeu $u = \frac{dM}{dp}$, fiet $\int up\,dp = \int p\,dM = pM - \int M\,dp$ Iam ſit $\int M\,dp = P$, erit $M = \frac{dP}{dp}$; et $dM = \frac{ddP}{dp}$ vnde ſit $u = \frac{ddP}{dp^2}$, atque porro:

$\frac{1}{2}x = \frac{p\,ddP}{dp^2} - \frac{dP}{dp}$; $\frac{z-y}{2} = \frac{ddP}{dp^2}$

et $\frac{z+y}{2} = \frac{pp\,ddP}{dp^2} - \frac{2p\,dP}{dp} + 2P$

hincque eliciuntur iſtae formulae:

$$x = \frac{2p\,ddP}{dp^2} - \frac{2dP}{dp}$$
$$y = \frac{(pp-1)ddP}{dp^2} - \frac{2p\,dP}{dp} + 2P$$
$$z = \frac{(pp+1)ddP}{dp^2} - \frac{2p\,dP}{dp} + 2P$$

## IX.

Loco praecedentis operationis fiat $\int up\,dp = N$, ſeu $u = \frac{dN}{p\,dp}$, eritque $\int u\,dp = \int \frac{dN}{p} = \frac{N}{p} + \int \frac{N\,dp}{pp}$. Iam ſit $\int \frac{N\,dp}{pp} = P$, fietque $N = \frac{pp\,dP}{dp}$ et $dN = \frac{pp\,ddP}{dp} + 2p\,dP$, vnde $u = \frac{p\,ddP}{dp^2} + \frac{2dP}{dp} = \frac{z-y}{2}$; at erit $\frac{z+y}{2} = \frac{p^3\,ddP}{dp^2} +$ et $\frac{1}{2}x = \frac{pp\,ddP}{dp^2} + \frac{p\,dP}{dp} - P$;

Ergo:

$$x = \frac{2ppddP}{dp^2} + \frac{2pdP}{dp} - 2P$$

$$y = \frac{p(pp-1)ddP}{dp^2} - \frac{2dP}{dp}$$

$$z = \frac{p(pp+1)ddP}{dp^2} + \frac{2dP}{dp}$$

## COROLL. 1.

71. Si rectificatio curuae non debeat eſſe algebraica, ſed a data quadratura pendere, hoc ope regulae primae ac ſecundae facile praeſtabitur. In prima enim regula pro V eiusmodi capiatur functio transcendens ipſius $u$, quae datam quadraturam puta $\int U du$ inuoluat, ita tamen vt $\frac{dy}{du}$ fiat quantitas algebraica; ſi ſecunda regula vti velimus, pro P eiusmodi functio transcendens ipſius $p$ accipi debet.

## COROLL. 2.

72. Vtrauis autem regula adhibeatur, id facile expediri poterit ope probl. 2. vt curuae rectificatio indefinita non ſolum a data quadratura pendeat, ſed vt in eadem curua tot, quot lubuerit, extent arcus, quorum longitudo algebraice exprimi queant.

## SCHOLION.

73. En ergo nouem formulas ſpecie quidem diuerſas, quibus curuae algebraicae, rectificabiles, continentur, verumtamen quaelibet earum tam late patet, vt omnes omnino curuas algebraicas, quae ſint rectificabiles, complectatur. Interim tamen quaedam in iis reperiuntur, quae ope leuis ſubſtitutionis ad ſe inuicem reducuntur

cuntur. Ita ſolutio quarta ad primam reducitur ponendo $M = u + V$ et $N = u - V$. Deinde ſi in ſexta ponatur $Q = Qqq$, ea redigitur ad quintam. De his autem ſolutionibus notandum eſt, ex ſingulis relationem finitam ſeu finitis quantitatibus expreſſam inter tres quantitates $x$, $y$ et $z$ reperiri poſſe, cum differentialia inde eliminari queant, pro ſingulis igitur ſolutionibus hae relationes finitae ita ſe habebunt:

Solutio I. dat $(z+V)^2 = x^2 + (y+u)^2$
Solutio II. dat $z\sqrt{(1+pp)} = x + py + P\sqrt{(1+pp)}$
Solutio III. dat $z\sqrt{(1+pp)} = x + py + Pp$
Solutio IV. dat $(z+y+M)(z-y-N) = xx$
Solutio V. dat $z(1+qq) = 2qx + (qq-1)y + 2Qqq$
Solutio VI. dat $z(1+qq) = 2qx + (qq-1)y + 2Q$
Solutio VII. dat $(z+y+4N)(z-y) = (x+2M)^2$
Solutio VIII. dat $(pp+1)z = 2px + (pp-1)y + 4P$
Solutio IX. dat $(pp+1)z = 2px + (pp-1)y + 4Pp$

Hinc patet ſolutiones II et III in vnam coaleſcere ſi in ſecunda ponatur $P = \frac{R}{\sqrt{(1+pp)}}$, vel in tertia $P = \frac{R}{p}$; inde enim prodit haec ſolutio ſimplicior:

$$x = -\frac{(1+pp)\,ddR}{dp^2} + \frac{p\,dR}{dp} - R$$

$$y = \frac{p(1+pp)\,ddR}{dp^2} - \frac{dR}{dp}$$

$$z = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\,ddR}{dp^2}$$

Deinde ſolutiones V, VI, VIII et IX manifeſto inter ſe conueniunt, et ad VI, quae eſt ſimpliciſſima, redeunt. Denique ſolutio IV ad primam eſt reducta ita vt tantum remaneant 4 ſolutiones quae pro diuerſis haberi queant:

(I, IV); (II, III); (V, VI, VIII, IX) et (VII).

Quatuor igitur has ſolutiones principales hic conſpectui exponere conueniet, formis earum ita parumper immutatis, vt in ſingulis ſit P functio quaecunque ipſius $p$.

## SOLVTIO I.

$$x = \frac{(dp^2 - dP^2)^{\frac{3}{2}}}{dp\,ddP}$$

$$y = \frac{dP(dp^2 - dP^2)}{dp\,ddP} - p$$

$$z = \frac{dp^2 - dP^2}{ddP} - P$$

$$(z+P)^2 = x^2 + (y+p)^2$$

## SOLVTIO II.

$$x = \frac{dp\,dP}{ddP} - p$$

$$y = \frac{dP^2 - dp^2}{2\,ddP} - P$$

$$z = \frac{dP^2 + dp^2}{2\,ddP} - P$$

$$(z+P)^2 = (x+p)^2 + (y+P)^2$$

SOLV.

## SOLVTIO III.

$$x = \frac{(1+pp)ddP}{dp^2} + \frac{pdP}{dp} - P$$

$$y = \frac{p(1+pp)ddP}{dp^2} - \frac{dP}{dp}$$

$$z = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}ddP}{dp^2}$$

$$z\surd(1+pp) = x + py + P$$

## SOLVTIO IV.

$$x = \frac{pddP}{dp^2} - \frac{dP}{dp}$$

$$y = \frac{(pp-1)ddP}{2dp^2} - \frac{pdP}{dp} + P$$

$$z = \frac{(pp+1)ddP}{2dp^2} - \frac{pdP}{dp} + P$$

$$(pp+1)z = 2px + (pp-1)y + 2P$$

Hinc igitur, ſi pro P functiones ſimpliciores ipſius $p$ ſubſtituantur; curuae algebraicae ſimpliciores, quae ſunt rectificabiles, obtinebuntur, ac parabolicas quidem ex III erui obſeruo, ſi ponatur $P = A + Bp^2 + Cp^4 + Dp^6 +$ etc. et coefficientes debite determinentur.

## PROBLEMA 18.

74. Inuenire duas curuas algebraicas ad eundem axem relatas, quarum vtriusque rectificatio a data quadratura pendeat, ita tamen vtriusque arcuum eidem abſciſſae reſpondentium ſumma algebraice exhiberi queat.

matur ſcilicet pro $q$ functio quaecunque ipſius $p$, ita vt $r$ et $s$ fiant functiones ipſius $p$, eruntque etiam $\mu$ et $\nu$ functiones ipſius $p$; quare pro P capi debebit functio transcendens ipſius $p$, quae quidem propoſitam quadraturam inuoluat, hocque modo N dabitur per P, vnde deinceps vtraque curua definietur. Hinc autem cum $\frac{d\mu}{d\nu}$ ſit functio ipſius $p$, alia ſolutio exhiberi poterit.

Scilicet ponatur: $\int M\,d\mu = R$ et $\int M\,d\nu = S$, ita vt R ſit functio algebraica, S vero datam quadraturam includat, eritque $M = \frac{dR}{d\mu} = \frac{dS}{d\nu}$, vnde fit $\frac{d\mu}{d\nu} = \frac{dR}{dS}$, ex qua aequatione quantitas $p$ definietur per nouam variabilem $\nu$, ſiquidem pro R et S capiantur functiones ipſius $\nu$, vnde denuo determinationes pro vtraque curua inuenientur.

## SCOLION.

75. Haec iam ſufficere videntur, ad oſtendendum quousque mihi quidem in cultura huius nouae methodi adhuc pertingere licuit; neque dubito, quin haec ſpecimina aliis anſam ſint praebitura, vires ſuas ad hanc methodum vlterius promouendam intendendi. Si enim methodus, quae Diophantea appellari ſolet, quondam ab excellentiſſimis ingeniis omni ſtudio eſt exculta, haec certe noua methodus, quae in quaeſtionibus longe ſublimioribus verſatur, minore attentione digna non eſt aeſtimanda.

DE

# DE CVRVIS FVNICVLARIIS ET CATENARIIS, VEL ILLIS, QVAE CORPORIBVS FLEXIBILIBVS INDVCVNTVR, CVM A POTENTIIS QVIBVSVIS SOLICITANTVR.

*Auctore G. W. KRAFFT.*

§. 1.

Vti principii compoſitionis et reſolutionis potentiarum ingens vſus eſt in tota Mechanica theoretica: ita idem vtiliſſime etiam ad curuas varias, *funicularias* dictas, applicari poteſt, adeo vt ex legibus pure mechanicis illae deriuentur; quod praeſenti ſcripto exponere conſtitui. Concipio igitur filum tenuiſſimum aliquod ABCDEFGH, perfecte flexile, ſuſpenſum in duobus punctis fixis A et H, in quod agunt potentiae BP, CP, DP, EP, FP, GP, pro lubitu variae, ratione tam intenſitatis, quam directionis, quae vero ope clauorum in A et H omnes ſeſe teneant in aequilibrio. Has potentias ſingulas reſoluo in ſuas laterales BQ et BR, CS et CT, DV et DW, EX et EY, FZ et FM, GN et GO, per parallelogramma QR, ST, VW, XY, ZM, et NO, ex productis rectis AB, BC, CD etc. hinc et inde, exorta.

Tab. I. Fig. 1.

§. 2. Atque primo quidem obſeruo: ob aequilibrium praeſens neceſſe eſſe, vt duae quaelibet vires ſibi di-

recte oppoſitae, quales ſunt BQ et CT, CS et DW, DV et EY, EX et FM, FZ et GO, inter ſe ſint aequales; vires autem BR ac GN, immediate agant in clauos firmos A et H. Producantur deinde etiam ſingulae directiones potentiarum verſus interiora fili; vnde in qualibet oriuntur duo anguli, quos breuitatis cauſſa per litteras *m* et *n*, in figura adſcriptas, *o* et *p*, *q* et *r*, *s* et *t*, *u* et *w*, *x* et *y* deſignabo.

§ 3. His ita praemiſſis, video in triangulo BPQ, expreſſis iterum compendii gratia ſinibus angulorum ABC, BCD, CDE, DEF, EFG, FGH, per $\int B$, $\int C$, $\int D$, $\int E$, $\int F$, $\int G$, reſpectiue, eſſe $\int Q$ ($=\int RBC=\int ABC=\int B$): $BP=\int QPB$ ($=\int PBR=\int m$): BQ; vnde $BQ=\frac{BP.\int m}{\int B}$. In triangulo autem BPR eſt, ſimili analogia, $\int R$ ($=\int B$): $BP=\int BPR$ ($=\int QBP=\int n$): BR, hinc $BR=\frac{BP.\int n}{\int B}$. Sunt igitur tres potentiae BQ, BP, BR, inter ſe reſpectiue, vti $\frac{BP.\int m}{\int B}$, BP, et $\frac{BP.\int n}{\int B}$; vel diuidendo per $\frac{BP}{\int B}$, vti $\int m$, $\int B$. $\int n$.

§. 4. Ex hac igitur detecta proprietate, erunt etiam in ſecundo parallelogrammo ST, potentiae CS, CP, CT, proportionales ipſis $\int o$, $\int C$, $\int p$; vnde deducuntur hi duo valores $CT=\frac{CP.\int p}{\int C}$, nec non $CS=\frac{CP.\int o}{\int C}$; Eſt vero per praecedentia (§. 2.) $CT=BQ=\frac{BP.\int m}{\int B}$ (§. 3.) hinc habemus $\frac{CP.\int p}{\int C}=\frac{BP.\int m}{\int B}$, aut vero $BP:CP=\frac{\int p}{\int C}:\frac{\int m}{\int B}$. Porro ſtatuitur ex pari ratione, eſſe DV, DP, DW

DW proportionales ipſius $\int q, \int D, \int r$; ex quo iterum conficitur $DW = \frac{DP.\int r}{\int D}$, ac $DV = \frac{DP.\int q}{\int D}$, ſed ob CS=DW oritur nunc etiam $\frac{CP.\int o}{\int C} = \frac{DP.\int r}{\int D}$ aut $CP : DP = \frac{\int r}{\int D} : \frac{\int o}{\int C}$, modo ante autem eſt $BP : CP = \frac{\int p}{\int C} : \frac{\int m}{\int B}$, adeoque multiplicando has duas proportiones; diuidendo tum, multiplicandoque per aequalia CP et $\int C$, exſurgit $BP : DP = \frac{\int r.\int p}{\int D} : \frac{\int o.\int m}{\int B}$. Denique tertio ſunt etiam EX, EP, EY proportionales ipſis $\int s, \int E, \int t$; hinc deriuatur $EY = \frac{EP.\int t}{\int E}$; deinde ob EY=DV, prodit haec aequalitas $\frac{EP.\int t}{\int E} = \frac{DP.\int q}{\int D}$, aut talis analogia, $DP : EP = \frac{\int t}{\int E} : \frac{\int q}{\int D}$, erat vero antea $BP : DP = \frac{\int r.\int p}{\int D} : \frac{\int o.\int m}{\int B}$, hinc iterum multiplicando omnes hos terminos in ſe, ac per eandem DP diuidendo, per $\int D$ vtrinque multiplicando enaſcitur haec proportio, $BP : EP = \frac{\int t.\int r.\int p.}{\int E} : \frac{\int q.\int o.\int m}{\int B}$, ex quo iam ratio quarumcunque aliarum talium potentiarum eſt manifeſta.

§. 5. Fluit ex hac generali conſideratione, vt ſi eiusmodi potentiae infinite multae, in ſingulis quippe fili perfecte flexilis punctis vna, fuerint applicatae: polygonum ABCDEFGH futurum eſſe infinite multorum laterum infinite paruorum, hoc eſt orituram eſſe ex hac actione potentiarum, in aequilibrio conſiſtentium, lineam curuam, quae filo repraeſentabitur. Et ſi quidem ponamus, potentias haſce quaslibet tali curuae applicatas eſſe normaliter, vti B P et E P, habebimus ex priori regula generali $BP : EP = \frac{\int t.\int r.\int p.}{\int E} : \frac{\int q.\int o.\int m}{\int B}$; quoniam Fig. 2.

 autem

autem, ob omnes potentias curuae normales, anguli in-
Fig. 1. termedii $r, q, p, o$, ſunt aequales, vtpote biſecti aequalium angulorum: erunt etiam eorum ſinus aequales., aut $\text{ſ}r = \text{ſ}q$; $\text{ſ}p = \text{ſ}o$; adeoque in hoc caſu erit, facta di-
Fig. 2. viſione per aequalia, $BP : EP = \frac{\text{ſ}t}{\text{ſ}E} : \frac{\text{ſ}m}{\text{ſ}B}$.

§. 6. Ponamus porro curuae huius duo elementa quaevis $Bb$, $Ee$; atque duo alia his contigua $B\beta$, $E\varepsilon$; producantur ſingula in tangentes $\beta BT$, $BbR$, nec non $\varepsilon Et$, $Eer$, quae conſtituent angulos infinite paruos $TBR$ et $tEr$; ſintque praeterea elementorum horum radii oſculi $BO$, $EQ$, et infinite vicini $bO$, $eQ$. Atque erit ſic, $BP : EP = \frac{\text{ſ}t}{\text{ſ}E} : \frac{\text{ſ}m}{\text{ſ}B}$ (§. 5.) $= \text{ſ}B : \text{ſ}E$, ob $t$ et $m$ rectos, $= \text{ſ}RBT : \text{ſ}rEt$, $= \text{ſ}BOb : \text{ſ}EQe = \frac{Bb}{BO} : \frac{Ee}{EQ}$; poſito ſinu toto $= 1$; quod idem eſt, ac duas potentias quasuis $BP$ et $EP$ eſſe in ratione compoſita, directa quidem elementorum, ac inuerſa radiorum oſculi; aut ſi vocare velimus elementum curuae $Bb = ds$ radium oſculi $BO = r$, erit potentia $BP$ vti $\frac{ds}{r}$; quod eſt *Theorema Varignonii in Nouuelle Mechanique* P. I. p. 204.

§. 7. Solui poſſunt ex his praemiſſis quaeſtiones omnes de genere curuarum aut *funiculariarum*, aut *catenariarum*, quas ita vocat *Ioh. Bernoullius* in *Operum Tom. III. p.* 491. Dicitur enim curua *funicularia*, quam aſſumit funis perfecte flexilis, non grauis, ſed fluido, quo extenditur, ad certam quandam figuram redactus; curua

*catena-*

*catenaria* vero, quam recipit ſua ſponte funis, etiam perfecte flexilis, ſed, quacunque placuerit, grauitate donatus, et ſolus. Ibi potentia agit ex legibus *Hydroſtaticae*, in ſingula elementa curuae normaliter; hic autem ex praeſcriptis *Staticae*, in eadem ſingula elementa verticaliter.

§. 8. Cum itaque ad mutandam figuram, recte extenſam, fili perfecte flexilis, non grauis, accidere debeat cauſſa aut *extrinſeca*, fluidum nempe; aut *intrinſeca*, pondus ſcilicet proprium; agemus de illo prius. In talem autem rectam, fili inſtar conſideratam, fluidum extrinſecum poteſt agere vel *elaſticitate*, vel *impulſu*, vel *pondere*. Sin igitur in hac diuiſione cauſſae extrinſecae et intrinſecae, vti hucusque factum fuit, acquieſcere velimus: conſideremus *primo*, fluidum ſua *elaſticitate* agens. Haec in ſingula curuae elementa, in aequilibrio conſiſtentis, vbique aequaliter aget, conſequenter erit vti $ds$ in ſenſu Phyſico. Sed eadem in ſenſu Statico debet eſſe ad aequilibrium conſeruandum, vti $\frac{ds}{r}$ (§. 6.) quare habebimus $ds = \frac{ds}{r}$, aut $r = 1$. Efficitur hinc curua talis, cuius radius oſculi eſt conſtans, quae nulla alia eſt quam Circulus. Vocatur haec *Velaria primi caſus*, quoniam nempe applicari poteſt ad velum, quod non ventus quidem incurrens, ſed aër adiacens elaſticus, expandit; veluti idem accidit in veſica aëre inflata, et poſtmodum obligata, quae certe ab hoc aëre incluſo, magis elaſtico expanditur ad figuram circulariter rotundam; ſimiliter hoc fit in bullis ſaponaceis, quae ſimul ac flatum fortius intendas, a figura rotunda abeunt, et longio-

rem adſciſcunt, quia ſcilicet ſic ſtatim pertinent ad *Velariam ſecundi caſus*, quam nunc videbimus. Alium modum, curuam hanc ſine calculo determinandi, affert *Ioh. Bernoullius* l. c. pag. 511. quoniam, ſi curua vbique aequaliter ſecundum perpendiculares ad curuam extrorſum trahitur: nulla adeſt ratio, cur vnum curuae punctum magis aut minus a centro diſtare debeat, quam alterum.

Fig. 3. §. 9. Cum igitur fluidum in filum ſimile cum impetu irruit, atque illud *impulſu ſuo* expandit, vti hoc fit in velo, quod a vento inflatur: tum alius exoritur calculus. Sit nempe curuatura fili hoc modo producta CAH, axis curuae ſit AB, cui parallelum irruat fluidum KM in elementum curuae $Mm$; ducta perpendiculari ad axem MP, ponatur $Ap = x$, $PM = y$, arcus $AM = s$, ſinus anguli incidentiae, id eſt, anguli $mME = m$, aſſumto ſinu toto $= 1$. Statuamus fluidi impetum abſolutum exprimi, in recta KM continuata, per $MD = p$. Reſoluendus hic erit in duos collaterales, vnum normalem ad curuam MF, qui ſolus in curuam agit, et alterum tangentialem MG, qui curuam praeterlabitur; ope parallelogrammi MFDG. Impetus nunc fluidi in curuam agens aeſtimandus erit ex ($m$E. MF); vbi $m$E exponit numerum punctorum, in quae ſingula impetus $p$ operatur; MF autem quantitatis abſolutae partem illam, quae in curuam agit. Erit igitur in triangulo MFD, ſin. F (1): MD ($p$) = ſin. FDM ($m$): MF ($pm$); in triangulo infinite paruo $m$EM pariter ſin. E (1): $Mm$ ($ds$) = ſin. M ($m$): $m$E ($mds$). Impetus ergo fluidi Phyſice

Phyſice ſpectatus, erit $m$E. MF $= pm^2 ds$; vel aſſumto $ds$, quod perpetuo faciemus, conſtanti; et quia $p$ per ſe conſtans ſupponitur, vti $m^2$, ſiue vti quadratum ſinus incidentiae. Idem ergo hic impetus fluidi, Phyſice ſpectatus, erit ob $m = \frac{dy}{ds}$ vti $\frac{dy^2}{ds^2}$, vel in ratione ipſius $dy^2$ ob $ds$ conſtans.

§. 10. At vero impetus hic, Mechanice conſideratus, debet eſſe vti $\frac{ds}{r}$ (§. 6.) vel vti $\frac{1}{r}$, ob $ds$ conſtans. Habebimus ergo pro hac curua, quam quaerimus, iſtam aequationem $dy^2 = \frac{1}{r}$. Demonſtrauit autem *Jac. Bernoullius Oper. Tom. I. p.* 578, poſitis $ds$ aequalibus, eſſe $r = \frac{dy\,ds}{ddx}$ vel vti $\frac{dy}{ddx}$; erit itaque curuae quaeſitae aequatio haec $dy^2 = \frac{ddx}{dy}$, vel, ad homogeneitatem conſeruandam, talis: $\frac{dy^2}{a\,ds} = \frac{ddx}{dy}$, in qua nimirum $a$ conſtantem denotat, ac $ds$ per ſe eſt conſtans. Haec aequatio vt ad differentialia prima reducatur, et quantum fieri poteſt, integretur: multiplicetur primo per $a\,ds^2\,dy$, vt emergat $ds\,dy^3 = a\,ds^2\,ddx$; pro $ds^2$ ſubſtituatur valor $dx^2 + dy^2$ erit nunc: $ds\,dy^3 = a\,dx^2\,ddx + a\,dy^2\,ddx$. Demonſtrauit autem *Jac. Bernoullius* in loco modo citato, poſitis curuae elementis aequalibus eſſe ſemper $dx\,ddx = -dy\,ddy$. Eſt enim ſic $\sqrt{(dx^2+dy^2)} =$ conſtanti, et ſumtis differentialibus $\frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = 0$, hoc eſt, $dx\,ddx = -dy\,ddy$; hinc pro $a\,dx^2\,ddx$ ſubſtituatur $-a\,dx\,dy\,ddy$ et per $dy^3$ diuidatur, prodibit ſic: $ds = \frac{a\,dy\,ddx - a\,dx\,ddy}{dy^2}$,

quae

quae integrata praebet $s\,dy = a\,dx$; et haec eſt aequatio huius *Velariae ſecundi caſus*, generatae nimirum per fluidi alicuius impulſum; indicans hanc curuae huius proprietatem, vt in ea ſit arcus quilibet AM ad conſtantem aliquam $a$, vti $dx$ ad $dy$.

§. 11. Sed vt curuae huius Velariae naturam rectius agnoſcamus, atque ex aequatione ipſius $s$ eliminemus; reſumamus aequationem ſuperiorem (§. 10.) hanc, $\frac{dy^2}{a\,ds} = \frac{ddx}{dy}$; hanc multiplicemus per crucem, vt obtineamus $dy^3 = a\,ds\,ddx$; pro $ddx$ ſubſtituamus valorem $-\frac{dy\,ddy}{dx}$ (§. 10.) et producetur $dx = -\frac{a\,ds\,ddy}{dy^2}$; cuius integralis eſt $x = C + \frac{a\,ds}{dy}$, adiecta conſtante arbitraria C, mox determinanda. Hinc ergo eruitur $\frac{dy}{ds} = \frac{a}{x - C}$; eſt autem $\frac{dy}{ds}$ ſinus anguli incidentiae, quem ſupra vocauimus $m$ (§. 9.) ac euidens eſt, ſi ponatur $x = o$, fieri angulum incidentiae ad A rectum, ac proinde poſito $x = o$, eſſe $\frac{dy}{ds} = 1$; ſubſtituantur haec, orietur $1 = \frac{a}{-C}$ vel $C = -a$; ergo pro C poſito $-a$, eſt aeqnatio completa curuae talis: $x = -a + \frac{a\,ds}{dy}$, aut $x + a = \frac{a\,ds}{dy}$. Quadrentur membra, multiplicentur per $dy^2$, pro $ds^2$ ſubſtituatur $dx^2 + dy^2$, abiectis abiiciendis prodibit tandem aequatio legitima, in qua origo abſciſſarum eſt in ipſo vertice A, talis pro *Velaria ſecundi caſus*: $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(x^2 + 2ax)}}$.

§. 12. Patet ex hac aequatione, eſſe $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{x\,dx + a\,dx}{\sqrt{(x^2 + 2ax)}}$, quae expreſſio poteſt integrari, vt ſit $\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(x^2 + 2ax)}$, adeoque rectificabilis eſt

eſt haec curua; quod ipſum etiam ex antecedente aequatione $s\,dy = a\,dx$ manifeſtum eſt, ſi valor ipſius $dy$ iam acquiſitus ſubrogetur; et per ſe etiam apertum eſt, dum tale filum longitudinem ſuam initialem horizontalem ſemper retinet. Cum itaque ſit $s = \sqrt{(x^2 + 2ax)}$; poterimus exinde facile determinare quantitatem conſtantis arbitrariae aſſumtae $a$. Sit enim integra fili longitudo CAH $= l$, et AB $= b$; atque euidens eſt, ſi $x$ abeat in $b$: mutari $s$ in $\frac{1}{2}l$; erit ergo $\frac{1}{2}l = \sqrt{(b^2 + 2ab)}$, aut vero $a = \frac{\frac{1}{4}l^2 - b^2}{2b}$. Porro eſt tangens anguli $m$ME $= \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{(x^2+2ax)}}$; quae fit infinita apud A; vbi nempe $x = o$, adeoque curua haec cum axe apud A facit angulum rectum. Sed apud C eadem tangens fit $\frac{\frac{1}{4}l^2 - b^2}{lb}$, exſiſtente nimirum $x = b$; quae tangens non eſt $= o$, niſi fuerit $\frac{1}{2}l = b$, aut CMA $=$ AB, quod fieri nequit. Euidens hinc eſt, angulum apud C, quem curua facit cum horizontali CB, nunquam eſſe rectum, ſed acutum ſemper.

§. 13. Si nunc tertio ponamus, fluidum agere in filum *ſuo pondere*, ſit filum incuruatum verticaliter poſitum CAH, repletum fluido vsque ad horizontalem CH, vt altitudo maxima fluidi ſit AB $= a$. Conſtat ex Hydroſtaticis, fluidum premere in elementum quodvis M$m$ normaliter, et pertinere etiam hunc caſum particularem ad ſuperiorem vniuerſalem (§. 6.). Notum porro eſt, poſita denſitate fluidi conſtante, preſſionem eius in M$m$ eſſe M$m$. MK $= ds.\,\overline{a-x}$, vel ob $ds$

 conſtans,

conſtans, vti $a - x$ Phyſice conſideratam. Sed eadem, Statice conſiderata, pro aequilibrio debet eſſe vti $\frac{ds}{r}$ (§. 6.) vel vti $\frac{1}{r}$, hoc eſt, vti $\frac{ddx}{dy}$; (§. 10.) exſurgit hinc pro hac curua aequatio haec, ad homogeneitatem redacta, $\frac{ddx}{dy} = \frac{\overline{a - x}.\, ds}{a^2}$; quae vero commodior efficitur, ſi pro axe aſſumatur ſuperficies fluidi ſtagnantis CH, vbi ſit $CK = t$, $KM = u$, $BC = b$; erit enim hac ratione $x = a - u$, $y = b - t$, $ds = \sqrt{(du^2 + dt^2)}$, et aquatio prior primaria mutatur in hanc $\frac{ddu}{dt} = \frac{u\,ds}{u^2}$; eſt autem, ob $ds = \sqrt{(dt^2 + du^2)}$ conſtans, $\frac{ddu}{dt} = -\frac{ddt}{du}$, vnde progignitur ſubſtituendo $-a^2 ddt = ududs$, et integrando, adiiciendoque nouam conſtantem C, $C ds - a^2 dt = \frac{1}{2} u^2 ds$. Vt vero haec conſtans determinetur: deducitur ex hac aequatione $\frac{C - \frac{1}{2}u^2}{a^2} = \frac{dt}{ds}$ = ſinui anguli $m$ME; qui angulus, ſi ſtatuatur $u = a$, abit in rectum; hinc poſito $u = a$, erit $\frac{dt}{ds} = 1$, et mutatur aequatio prior in hanc, $\frac{C - \frac{1}{2}a^2}{a^2} = 1$, aut $C = \frac{3a^2}{2}$; igitur aequatio completa curuae quaeſitae erit haec: $3a^2 ds - u^2 ds = 2a^2 dt$, aut quadratis membris, et ſubſtituto valore ipſius $ds$, qui eſt $\sqrt{(dt^2 + du^2)}$, talis $\frac{(3a^2 - u^2)\,du}{\sqrt{(6u^2u^2 - u^4 - 5a^4)}} = dt$, in qua aequatione eſt abſciſſa $CK = t$, et applicata $KM = u$. Haec igitur natura eſt curuae, quae *Lintearia* vocatur.

§. 14. Accedamus iam ad alterum genus harum curuarum, in quo nempe curuatura fili producitur a cauſa *intrinſeca*, (§. 8.) videlicet grauitate. Quamuis autem directiones grauitatis omnes tendant in centrum terrae,

terrae, adeoque ſint conuergentes, non parallelae: in locis tamen, et corporibus illis, quae ſub experimenta noſtra cadunt, illae directiones tuto aſſumi poſſunt parallelae, quod etiam ordinarie ſupponitur in hac tractatione. Cum igitur vidimus in genere eſſe (§. 4.) BP: $EP = \frac{\int t.\int r.\int p}{\int E} : \frac{\int q.\int o.\int m}{\int B}$, obtinebimus in parallelismo omnium harum potentiarum $\int p = \int q$. Sunt enim $p$ et $q$ duo anguli interni inter parallelas CP, DP; hinc ſimul ſumti adaequant duos rectos, adeoque habent eundem ſinum. Praeterea ob eandem hanc cauſſam eſt etiam $\int r = \int s$, nec non $\int o = \int n$; quibus ſubſtitutis, et diuiſione facta per aequales $\int p$ et $\int q$, prodit BP : EP $= \frac{\int t.\int s}{\int E} : \frac{\int m.\int n}{\int B} = \frac{\int B}{\int m.\int n} : \frac{\int E}{\int t.\int s}$; aut vero potentia quaevis BP eſt vti $\frac{\int B}{\int m.\int n}$. Fig. 1.

§. 15. Iam porro ſimili ratiocinio, quale ſupra (§. 6.) allatum fuit, erit $\int B = \int bB\beta = \int TBR$, quia B et TBR faciunt duos rectos; eſt autem $TBR = BOb$, hinc $\int B = \int BOb = \frac{Bb}{BO}$, poſito ſinu toto $= 1$. Efficiunt quoque anguli $m$ et $n$ duos rectos, deficiente angulo infinite paruo TBR, qui plane nullus eſt, neque adeo in computum venit, niſi vbi in rationem ingreditur; vnde erit etiam $\int n = \int m$. Eſt hinc, poſitis denuo $Bb = ds$, BO radio oſculi $= r$, potentia quaeuis, cum reliquis omnibus in aequilibrio ſita, vti $\frac{ds}{r.\int m.\int m}$; hoc eſt, in ratione compoſita directa elementi, et inuerſa ſimplici radii oſculi, duplicataque ſinus anguli $m$. Quamobrem ſi fuerint denuo $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, et poſitis $ds$ conſtantibus, $r = \frac{dy\,ds}{ddx}$, $\int m = \frac{dy}{ds}$, habebi- Fig. 2. Fig. 3.

tur potentia $MD = \frac{ddx\, ds^2}{dy^3}$; aut ob $ds$ conſtans, erit illa vti $\frac{ddx}{dy^2}$.

§. 16. Exinde iam facile determinatur curua illa, quam format pondere proprio ſuo, ex grauitatis actione, filum, funis, vel catenula, perfecte flexilis in omnibus ſuis punctis, ſed inextenſibilis, ab vtroque extremo ſuo quomodocunque ſuſpenſa, in medio autem libere pendula, et praeterea vbique aequaliter craſſa. Nam in tali catenula vis, qua elementum quoduis verticaliter deſcendere nititur, eſt vt pondus ipſius elementi, quae longitudini eius eſt proportionalis, aut $ds$. Statice vero conſiderata haec vis, ad producendum aequilibrium, debet eſſe vti $\frac{ddx}{dy^2}$ (§. 15.). Habemus igitur $ds = \frac{ddx}{dy^2}$, aut $1 = \frac{ddx}{ds\, dy^2}$; hoc eſt $\frac{ddx}{ds\, dy^2}$ debet eſſe quantitas conſtans. Quod vt efficiatur, ponamus hanc conſtantem quantitatem $= \frac{1}{a\, ds^2}$; ad homogeneitatem reſtituendam; erit ſic $\frac{ddx}{ds\, dy^2} = \frac{1}{a\, ds^2}$, aut vero, reducendo paullisper hanc aequationem, obtinebitur haec $\frac{dy^2}{a\, ds} = \frac{ddx}{dy}$, quae eſt eadem cum illa, quam ſupra inuenimus pro *Velaria ſecundi caſus* (§. 10.). Haec autem curua, tali reſpectu conſiderata, vocatur *Catenaria vulgaris*, quia formatur a filo aequaliter craſſo, ſeu in omnibus punctis ſuis aequaliter grauato; quae adeoque eadem eſt cum Velaria ſecundi caſus, et primum inuentorem agnoſcit *Galilaeum* in *Mechanica*, *Dialogo II. pag.* 131; qui eam falſo pro Parabola Apolloniana habuit; quem errorem animaduertit quidem *Joach. Jungius*, veram tamen curuam non aſſignauit; quod factum demum eſt a *Leibnitio* et *Bernoulliis* in *Act. Erud. Lipſ.* 1691.

§. 17.

§. 17. *Catenaria autem non vulgaris*, quae nimirum formatur a filo inaequaliter craſſo, quod in omnibus ſuis punctis inaequaliter eſt grauatum, ſecundum progreſſionem applicatarum curuae alicuius datae, non difficilius inuenitur. Quoniam nempe aequationem Catenariae $\frac{dy^2}{ads} = \frac{ddx}{dy}$, praeter quantitatem per ſe conſtantem $a$, tres adhuc variabiles $x$, $y$, et $s$ ingrediuntur: aſſumatur quantitas quaedam variabilis M, vtcunque ex conſtantibus, ac ipſis $x$, $y$, $s$, compoſita, et ſtatuatur Catenariae huius non vulgaris elementum quodlibet habere pondus, ſeu grauamen, $= dM$. Habebitur nunc $dM = \frac{ddx}{dy^3}$, aut $1 = \frac{ddx}{dM\,dy^3}$, hoc eſt $\frac{ddx}{dM\,dy^3}$ aequatur conſtanti alicui quantitati homogeneae. Sit haec $\frac{1}{ads^2}$, atque ſtatuendum erit $\frac{ddx}{dM\,dy^3} = \frac{1}{ads^2}$, ex quo producitur $\frac{ads^2\,ddx}{dy^3} = dM$. Subſtituendo $dx^2 + dy^2$ loco ipſius $ds^2$, emergit $\frac{adx^2\,ddx + ady^2\,ddx}{dy^3} = dM$; et quoniam hic etiam, ob $ds$ conſtans, eſt $dx\,ddx = -dy\,ddy$ (§. 10.) aut $dx^2\,ddx = -dx\,dy\,ddy$: orietur, hoc valore ſubrogato, aequatio ſequens: $\frac{-adx\,ddy + ady\,ddx}{dy^2} = dM$, quae aequatio poteſt integrari, et praebet, aſſumta conſtante arbitraria C, hanc $C + \frac{adx}{dy} = M$. Hinc primo ex data talis curuae Catenariae aquatione cognoſci poterit, quale pondus elemento cuilibet tribui debeat pro tali curua obtinenda, et quaenam lex aut progreſſio ſit craſſitudinis in fune aut catena.

§. 18. Deinde etiam ſecundo ex eadem hac aequatione vltima indicare valebimus, qualis curua ſub hac vel alia ponderis et grauaminis lege Catenaria non

vulgaris ſit futura. Accipimus enim ita aequationem inter $x$, $y$ et $s$, et conſtantes, pro ratione ipſius M aſſumtae. Ita ſi ſtatuamus, pondus cuiusque elementi curvae, ſeu $dM$ eſſe $ds$; obtinebimus ſtatim aequationem ad *Catenariam vulgarem*. Si determinemus $dM = dv$, aut $M = y$, erit pro Catenaria in hac diſpoſitione aequatio haec $C\,dy + a\,dx = y\,dy$, aut integrata $Cy + ax = \frac{1}{2}y^2$ quae eſt ad Parabolam ordinariam. Imo qualiscunque curua deſideretur pro hac Catenaria: poterit ſemper dari lex grauitatis neceſſaria ad hanc Catenariam. Requiro ex. gr. vt catenaria aſſumat naturam Circuli, cuius aequatio ſit $y = V(2ax - x^2)$; quaero iam, quid ſit $\frac{a\,dx}{dy}$ in Circulo, et hoc inuenio $\frac{a\sqrt{(2ax - x^2)}}{a - x}$, quod igitur $=$ M.

Fig. 4. §. 19. Sit lamina elaſtica, non grauis, ac elaſticitate vbiuis eadem praedita AMB, firmata in A, et pondere P, ſuper trochleam D transeuntis fili ope, in hunc ſitum, et ad aequilibrium redacta: vocatur curua haec, quam lamina aſſumit, *Elaſtica*, et quaeritur eius natura. Ducantur AC verticalis, et ad hanc ex puncto quocunque M perpendiculares MP, $mp$, et verticalis itidem MQ, poſita BCD horizontali. Concipiantur duo curuae elementa $\mu$M et M$m$, quae producta in T et $t$, conſtituant angulum infinite paruum $TMt$, et ſint elementi M$m$ radii oſculi MO, $mo$. Sint praetera, vis elaſtica, vbique conſtans $= e$, $AP = x$, $PM = y$, $AC = a$, $AM = s$; et quoniam elementum MO $=$ Mm circa hypomochlium M torquetur a potentia quadam, quam pono $= p$; erit eius potentiae momentum $p \times Mm = e \times$ ang. $TMt$; quae hypotheſis quidem eſt, ſed pro angulo

TM$t$

T M*t* infinite paruo, experimentis Phyſicis confirmata. Vid. *Comment. Acad. Scient. Imperial. Petropol. Tom. III. p.* 71. Retro nititur ſcilicet elaſticitatis intenſitas in elemento M*m*, quae eſt *e*, abſoluendi angulum T M*t*, adeoque haec vis mortua eſt productum ex magnitudine potentiae in celeritatem initialem aut potentialem, hoc eſt $e \times TMt$. Huic vi mortuae autem, ob aequilibrium praeſens, aequalis eſt actio potentiae, ductae in diſtantiam ſuam a fulcro, aut vero *p*. M*m*, vnde dicta aequalitas vtriusque huius momenti apparet, atque inde deducitur $p = \frac{e \times TMt}{Mm}$. Producit autem hunc effectum inflexionis pondus appenſum P, cuius momentum eſt magnitudo ipſius P, ducta in diſtantiam ipſius ab hypomochlio M Q, aut vero eſt hinc $p = P + MQ$. Aequato autem vtroque hoc valore ipſius *p*, eruitur haec aequatio $\frac{e \times TMt}{Mm} = P \times QM$, aut vero ob P, *e*, M*m*, conſtantes, erit T M*t* in ratione ipſius Q M. Sed eſt $TMt = MOm$; et cum quilibet angulus ſit vt arcus ipſius diuiſus per radium ſuum, erit $TMt = \frac{Mm}{MO}$, vel ob M*m* conſtans, vti $\frac{1}{MO}$; habetur idcirco $\frac{1}{MO} = MQ$. Poſitis vero M*m* conſtantibus eſt $MO = \frac{dyds}{ddx}$, vel vti $\frac{dy}{ddx}$, et M Q eſt $a - x$, vnde conficitur pro hac curua Elaſtica talis proprietas, vt Q M ſit in ratione reciproca radii oſculi M O, aut $\frac{ddx}{dy} = a - x$, ſeu ad conciliandam huic aequationi homogeneitatem, $\frac{ddx}{dy} = \frac{\overline{a-x}, ds}{a^2}$, quae eſt eadem plane aequatio, quam ſupra inuenimus (§. 13.) pro *Lintearia*, ex quo patet, vtramque hanc curuam, *Lintearіam* ac *Elaſticam*, eſſe vnam eandemque.

§. 20.

§. 20. Pari facilitate ex iisdem principiis ſolui poteſt problema de *curuatura fornicis, cuius partes ſe mutuo proprio pondere ſuſſulciunt, ſine opere caementi*; quod *Iacob. Bernoullius* ſoluit alia methodo, in *Oper. Tom. II. pag.* 1119; ſed emendationem ſubtilis alicuius paralogiſmi requirente, quae ibidem adiecta eſt. Notari autem debet, agi hic de fornice aequaliter vbique craſſo, adeoque per lineam ſolam repreſentando, ſine latitudine, cuius partes aequales vbique idem habeant pondus. Quomodo autem fornix inaequaliter craſſus ſumma firmitate, ſub quauis expreſſa curua, ſit conſtruendus, alio loco oſtendimus. Sit itaque talis fornix aequaliter vbique craſſus C A D, et ipſe ſua ſe compage ſuſtinens, ſine auxilio calcis aut caementi, dum nempe ex antecedentibus, vires ad ipſum conuellendum a proprio pondere impenſae, mutuo ſe deſtruunt. Sint eius axis A E, in quo abſciſſa A P $= x$, applicata T M $= y$, et arcus A M $= s$; adeoque pondus arculi infinite parui M $m = ds$. Exponatur hoc ponduſculum lineola recta verticali M P, quod ad proſternendum elementum M $m$ circa hypomochlium $m$, lucratur momentum ex diſtantia $m$ N, quae adeo energia, ſi pars ſuperior M A abeſſet, erit $m$ M. $m$ N $= ds\,dy$, vel ob $ds$ conſtans, vti $dy$. Reſoluatur haec vis grauitatis abſoluta in tangentialem M $m$ et normalem MB; eritque analoga haec: ſin. M $m$ P (1): MP ($dy$) $=$ ſin. $m$ M P ($\frac{dy}{ds}$): $m$ P ($=$ MB) $= \frac{dy^2}{ds}$; vt hinc vis normalis M B, Phyſice ſpectata, ex natura ponderis MP, debeat eſſe vti $dy^2$. Sed eadem vis Statice conſiderata debet eſſe vti $\frac{1}{r}$ (§. 6.); habemus ergo pro curua fornicis deſiderata aequationem hanc, $dy^2 = \frac{1}{r}$, vel ob

ob $r$ vti $\frac{dy}{ddx}$ (§. 10.) ſequenter: $dy^2 = \frac{ddx}{dy}$, quae eſt eadem cum Velariae aequatione (§. 10.) ſecundi caſus, aut cum Catenaria vulgari (§. 16.) Vnde patet, quod *Iac. Bernoullius* l. c. et *Dauid. Gregorius* primus in *A. E.* 1698. *pag.* 309, indicarunt, curuaturam fornicis memorati, aequaliter denſi, eandem eſſe cum curuatura Catenariae vulgaris. Cum itaque iam ex principio pure mechanico aequationes et naturae harum curuarum erutae ſint: de vlterioribus harum curuarum proprietatibus, pulcherrimis ſane et ſingularibus, ab aliis iam enumeratis et expoſitis, nihil amplius addimus.

§. 21. Sed de eadem hac Catenaria ſciendum eſt, eandem tanquam lineam latitudine carentem, inverſam, et verticaliter erectam, in aequilibrio manere minime poſſe, niſi concipiatur grauitatis actio ſurſum verſa, et extrorſum directa. Quod vero cum ad fornices applicari nequeat: videbimus alia etiam methodo, nempe *Bernoulliana*, ſed correcta, et paralogismo *l. c.* libera, quomodo curuatura fornicis, cuius partes ſe mutuo proprio pondere ſuffulciunt, ſine opere caementi, ſit indaganda. Sit igitur linea curua quaeſita interior AMD, ſiue concauitas fornicis, eidemque ſub latitudine quauis parallela alia CBE, ſiue conuexitas fornicis. Fig. 6.
Aſſumatur cuneus quilibet infinite paruus, fornicem conſtituens BM$mb$, contentus intra duos radios oſculi proximos MO, $m$O, extrorſum protenſos in B et $b$, ſitque M$\beta$ parallela ipſi $mb$, ita vt B$\beta$ ſit differentia lateris interioris M$m$, et exterioris B$b$, ponaturque more ſolito AP $= x$, PM $= y$, AM $= s$, eritque pondus huius cunei, ob altitudinem, et latitudinem, denſitatemque

que eius, conſtantes, vti $ds$. Sed hoc poſitum eſt in plano inclinato $mO$, vnde erit pondus abſolutum ($ds$): pondus reſpectiv. $= mO : mS = Mm : mQ$, ob triangula ſimilia $mSO$ et $mQM = ds : dy$, vnde elicitur pondus reſpectiuum cunei, quo delabi conatur, in plano ſuo inclinato $= dy$; ac quidem tali potentia attollet partem fornicis ſuperiorem CAMB, ſi delabatur, et parte ſua latiori $Bb$ intra angulum $Bob$ intrudatur. Haec autem ipſa fornicis pars ſuperior ſoluta CAMB pondere ſuo deprimit, et reſiſtit hinc eleuationi perpendiculariter in BM; et cum eius pondus ſit vti $s$, verticaliter deorſum nitens, poterit illud exprimi per MQ, quia in tempuſculo infinite paruo punctum $s$ per tantundem ſpatii verticaliter deorſum promouetur, ac centrum grauitatis in CAMB. Sit igitur $MQ = s$, et reſoluatur in laterales MR et $Mm$, illam horizonti parallelam, et hanc in latus BM perpendicularem, ac aſſumto ſinu toto $= 1$, erit ſinus $MmQ$ $(\frac{dx}{ds})$ : MQ $(s)$ $=$ ſin. tot. $(1)$ : $Mm$, hoc eſt ad vim prementem perpendicularem ad MB, quae adeoque erit $= \frac{sds}{dx}$. Cum igitur cuneus delabatur per integram ſuam latitudinem $\beta M$, habebit preſſionem, quae aequalis eſt potentiae ipſi multiplicatae in ſuam viam percurſam tempore infinite paruo, vel in ſuam celeritatem elementarem, hoc eſt, $(dy \times \beta M.)$ Interea vero eleuabit fornicis partem ſuperiorem ſpatiolo $\beta B$, quae ex ſimili ratione perpendiculariter in BM deorſum premit quantitate hac, $(\frac{sds}{dx} \times \beta B.)$ Quod ſi nunc hae duae preſſiones, directe ſibi contrariae, ponantur aequales: orietur aequilibrium, vt neque cuneus delabi, neque pars ſuperior fornicis attolli, poſſit.

Erit

Erit itaque $dy. \beta M = \frac{sds}{dx}. \beta B$. Sed ob ſectores ſimiles $OmM$, et $M\beta B$ oritur $Om$ ($r$) : $mM$ ($ds$) $= \beta M : \beta B$, hinc $\beta B, = \frac{ds.\beta M}{r}$, quod in aequatione praecedente ſubſtitutum efficit $dy. \beta M = \frac{sds^2}{rdx} \times \beta M$, aut vero $dy = \frac{sds^2}{rdx}$. Ponamus iam cum *Bernoullio*, $dy$ eſſe conſtans, ex quo radius oſculi $r$ eruitur $= \frac{ds^2}{dyddx}$, qui valor ſubrogatus efficit $1 = \frac{sddx}{dsdx}$ aut $sddx - dsdx = 0$, vel integrando $\frac{dx}{s} = \frac{dy}{a}$, ob $dy$ conſtans, et accepta noua conſtante $a$, vt aequatio homogenea reddatur. Ex hac igitur aequatione oritur haec : $sdy = adx$, quam ſupra vidimus eſſe ad Velariam ſecundi caſus, (§. 10.) aut vero ad Catenariam vulgarem ; (§. 16.) vnde conſtat, quaeſitam hanc curvam interiorem fornicis AMD eſſe Catenariam inuerſam. Quia vero planum inclinatum $bmO$ ſupponitur perfecte politum : hinc cuneus non poterit in eo deſcendere rotando, neque adeo opus eſt, vt hic caſus conſideretur, (vid. *Comment. Acad. Scient. Imper. Petrop. Tomo* XII, *pag.* 266,) vti in ſolutione Bernoulliana factum fuit.

# SVBSIDIVM
## CALCVLI SINVVM.

*Auctore* L. EVLERO.

Ex quo calculus ſinuum in analyſin eſt receptus, ita vt ſinus, coſinus ac tangentes angulorum legibus calculi aeque ſint ſubiecti, ac logarithmi atque adeo ipſae quantitates algebraicae, maxima ſine dubio incrementa Analyſis cepiſſe eſt cenſenda. Logarithmi quidem ſtatim a primis fere Analyſeos ſublimioris initiis inter quantitates analyticas referri ſunt coepti, iisque imprimis calculus exponentialium cuius inuentionem Cel. *Ioh. Bernoulli b. m.* iure ſibi vindicauerat, acceptus eſt ferendus: cuius beneficio, vt nunc quidem vel tyronibus conſtat, plurimae praeclarae inuentiones in medium ſunt prolatae. Quae calculi acceſſio in hoc potiſſimum conſtabat, vt logarithmi non ſolum idoneis characteribus in calculum eſſent inducti, ſed etiam certae regulae ſtabilitae, ſecundum quas omnes analyſeos operationes aeque in logarithmis expedire liceat, atque in quantitatibus algebraicis. Simili autem modo mihi equidem angulorum ſinus tangentesque primus in calculum ita transtuliſſe videor, vt inſtar reliquarum quantitatum tractari, cunctaeque operationes ſine vllo impedimento peragi poſſent. Etſi autem haec res haud magni momenti fortaſſe videatur, dum maximam partem in characteribus eſt ſita, quibus in calculo ad eas quantitates deſignandas vti ſoleo; quandoquidem regulae eas tam per differentiationem, quam integrationem, euoluendi iam pridem

pridem ſunt erutae: tamen haec ipſa notandi ratio poſt-modum vniuerſae analyſi tanta attulit adiumenta, vt nouum fere campum pateſeciſſe videatur, in quo Geometrae non ſine notabili elaborauerint fructu. Ac ſi quidem ipſius Analyſis praeſtantiam ſpectamus, eam praecipue ſoli idoneo, quantitates ſignis denotandi modo tribuendam eſſe deprehendimus, quo minus erit mirandum, ſi commoda ſinuum in algorithmum introductio tantum lucri attulerit. Neque vero hoc ſubſidio ſolum calculi, qui ſaepenumero fierent maxime prolixi et intricati, mirum in modum contrahuntur, quod quidem iam eſſet eximium commodum: ſed etiam huius calculi ſinuum ope problemata alioquin difficillima ſatis expedite reſolui poſſunt; cuius quidem rei iam complura ſpecimina extant, non ſolum a me, ſed etiam ab aliis, exhibita. Vtilitas autem huius calculi imprimis in problematis mechanicis cernitur, multo maxime autem in Aſtronomia Theoretica, vbi totum negotium ad computum angulorum reducitur, ita vt ſine huius calculi ſubſidio vix quicquam ſit expectandum. Quae nunc certe de Lunae motu anomalo, ac planetarum perturbationibus ab mutua eorum actione oriundis ſunt eruta, huic calculo potiſſimum accepta ſunt ferenda, neque ex hac parte Aſtronomia maiora incrementa ante conſequi poſſe videtur, quam hic ipſe calculus ad maiorem perfectionis gradum fuerit euectus. Minime ergo erunt contemnenda, quae in iſthoc calculo elaborando vlteriusque excolendo verſantur; atque cum reſolutio poteſtatum tam ſinuum, quam coſinuum, in ſinus coſinusue ſimplices maximi ſit momenti, et in Aſtronomicis inveſti-

veſtigationibus abſolute neceſſaria, etiamſi iam hinc inde nonnulla huc ſpectantia protulerim, tamen haud abs re fore arbitror, ſi hoc egregium argumentum ſtudioſius pertractauero.

## LEMMA.

I. Valor huius formulae imaginariae $(\text{coſ.}\,\phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\phi)^n$ eſt $\text{coſ.}\,n\phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,n\phi$, huius autem formulae imaginariae $(\text{coſ.}\,\phi - \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\phi)^n$ valor eſt $\text{coſ.}\,n\phi - \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,n\phi$.

## DEMONSTRATIO.

*Si* enim habeantur duo anguli $\phi$ et $\alpha$, erit harum duarum formularum productum $(\text{coſ.}\,\phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\phi)$ $(\text{coſ.}\,\alpha + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\alpha) = \text{coſ.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\alpha - \text{ſin.}\,\phi\,\text{ſin.}\,\alpha + (\text{ſin.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\alpha + \text{coſ.}\,\phi\,\text{ſin.}\,\alpha)\sqrt{-1}$. Conſtat autem eſſe $\text{coſ.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\alpha - \text{ſin.}\,\phi\,\text{ſin.}\,\alpha = \text{coſ.}\,(\phi + \alpha)$ et $\text{ſin.}\,\phi\,\text{coſ.}\,\alpha + \text{coſ.}\,\phi\,\text{ſin.}\,\alpha = \text{ſin.}\,(\phi + \alpha)$, vnde illud productum erit $= \text{coſ.}\,(\phi+\alpha) + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,(\phi+\alpha)$. Sit iam $\alpha = \phi$ eritque

$$(\text{coſ.}\,\phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\phi)^2 = \text{coſ.}\,2\phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,2\phi.$$

Haec formula denuo per $\text{coſ.}\,\alpha + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\alpha$ multiplicata dabit $\text{coſ.}\,(2\phi + \alpha) + \sqrt{-1}\,\text{ſin.}\,(2\phi + \alpha)$, ac poſito $\alpha = \phi$

$$(\text{coſ.}\,\phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\phi)^3 = \text{coſ.}\,3\phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,3\phi$$

Quae ſi denuo per $\text{coſ.}\,\alpha + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\alpha$ multiplicetur, ac ponatur $\alpha = \phi$, dabit

$$(\text{coſ.}\,\phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\phi)^4 = \text{coſ.}\,4\phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,4\phi$$

hocque modo generatim colligitur fore

(coſ.

$$(\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,\Phi)^n = \text{coſ.}\,n\,\Phi + \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,n\,\Phi.$$

Cum autem expreſſio $\sqrt{-1}$ natura ſua ſigni ambiguitatem inuoluat, erit ob eandem rationem

$$(\text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,\Phi)^n = \text{coſ.}\,n\Phi - \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,n\Phi$$

## COROLL.

2. Si ergo breuitatis gratia ponatur:

$$\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,\Phi = u \quad \text{et} \quad \text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,\Phi = v$$

cum ſit $u^n = \text{coſ.}\,n\Phi + \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,n\Phi$ et $v^n = \text{coſ.}\,n\Phi - \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,n\Phi$ erit $u^n + v^n = 2\,\text{coſ.}\,n\,\Phi$ et $u^n - v^n = 2\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,n\,\Phi$. Conſtat autem eſſe $uv = 1$.

## PROBLEMA 1.

3. Poteſtatem quamcunque coſinus cuiuspiam anguli in coſinus ſimplices conuertere, ita vt nuſquam duo pluresue occurrant coſinus in ſe inuicem multiplicati.

## SOLVTIO.

Sit $(\text{coſ.}\,\Phi)^n$ ſeu $\text{coſ.}\,\Phi^n$ (has enim deſignationes pro ſynonimis habeo) poteſtas propoſita ad modum praeſcriptum conuertenda. Ponatur vt ante

$$\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,\Phi = u \quad \text{et} \quad \text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,\Phi = v,$$

eritque $\text{coſ.}\,\Phi = \frac{1}{2}(u+v)$,

ideoque $\text{coſ.}\,\Phi^n = \dfrac{(u+v)^n}{2^n}$ ſeu $2^n\,\text{coſ.}\,\Phi^n = (n+v)^n$

Quae poteſtas binomialis ſolito modo euoluatur, vt prodeat:

$$2^n\,\text{coſ.}\,\Phi^n = u^n + n\,u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u^{n-3}v^3 + \text{etc.}$$

ſimilisque expreſſio prodit, ſi litterae $u$ et $v$ permutentur. Additis ergo his duabus expreſſionibus prodit

$$2^{n+1}\,\text{coſ.}\,\Phi^n = u^n + v^n + \frac{n}{1}(u^{n-2} + v^{n-2})uv + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(u^{n-4} + v^{n-4})u^2v^2 + \text{etc.}$$

et

et ob $uv = 1$ habebitur diuidendo per 2

$$2^n \operatorname{coſ}.\Phi^n = \tfrac{1}{2}(u^n+v^n)+\tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{1}{2}(u^{n-2}+v^{n-2})+\tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}\tfrac{1}{2}(u^{n-4}+v^{n-4})$$
$$+\tfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\tfrac{1}{2}(u^{n-6}+v^{n-6})+ \text{etc.}$$

Verum cum ſit $u^n + v^n = 2 \operatorname{coſ}. n\Phi$, perſpicuum eſt fore:

$$2^n \operatorname{coſ}.\Phi^n = \operatorname{coſ}.n\Phi+\tfrac{n}{1}\operatorname{coſ}.(n-2)\Phi+\tfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}\operatorname{coſ}.(n-4)\Phi+\tfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\operatorname{coſ}.(n-6)\Phi+\text{etc.}$$

In qua ſerie cum ad coſinus angulorum negatiuorum peruenitur notandum eſt eos conuenire cum coſinibus eorundem angulorum affirmatiue ſumtorum, ſeu eſſe coſ. $(n-m)\Phi =$ coſ. $(m-n)\Phi$. Q. E. I.

## COROLL. 1.

4. Si ſit $n = 1$. erit $2 \operatorname{coſ}.\Phi = \operatorname{coſ}.\Phi + \operatorname{coſ}.\Phi = 2 \operatorname{coſ}.\Phi$; at ſi $n = 2$ habetur $2^2 \operatorname{coſ}.\Phi^2 = \operatorname{coſ}.2\Phi + 2\operatorname{coſ}.0\Phi + \operatorname{coſ}.2\Phi = 2\operatorname{coſ}.2\Phi + 2$. Sit $n = 3$, eritque $2^3 \operatorname{coſ}.\Phi^3 = \operatorname{coſ}.3\Phi + 3\operatorname{coſ}.\Phi + 3\operatorname{coſ}.\Phi + \operatorname{coſ}.3\Phi = 2\operatorname{coſ}.3\Phi + 6\operatorname{coſ}.\Phi$. Sit $n = 4$ erit $2^4 \operatorname{coſ}.\Phi^4 = \operatorname{coſ}.4\Phi + 4\operatorname{coſ}.2\Phi + 6\operatorname{coſ}.0\Phi + 4\operatorname{coſ}.2\Phi + \operatorname{coſ}.4\Phi$, ideoque cum ſinguli termini praeter medium bis occurrant, ob coſ. $0\Phi = 1$ erit:

$$2^4 \operatorname{coſ}.\Phi^4 = 2\operatorname{coſ}.4\Phi + 8\operatorname{coſ}.2\Phi + 6.$$

## COROLL. 2.

5. Idem hoc ſemper vſu venit, quoties $n$ eſt numerus integer affirmatiuus, vt ſeries a fine ſcripta eadem prodeat, ideoque ſinguli termini praeter medium bis occurrant. Medius autem terminus adeſt quoties $n$ eſt numerus par, coſinusque hoc termino contentus abit in vnitatem.

COROL.

## COROLL. 3.

6. Quodſi ergo termini aequales ab initio et fine coniungantur, et tota ſeries per 2 diuidatur, iidem habebuntur coefficientes qui ante, niſi quod termini conſtantis, ſi quis adeſt, coefficiens in ſui ſemiſſem ſit transmutandus. Vnde hae transformationes, quoties $n$ fuerit numerus integer poſitiuus, ita ſe habebunt:

$$1 \text{coſ.} \Phi = \text{coſ.} \Phi$$
$$2 \text{coſ.} \Phi^2 = \text{coſ.} 2\Phi + \tfrac{1}{2}.2$$
$$4 \text{coſ.} \Phi^3 = \text{coſ.} 3\Phi + 3 \text{coſ.} \Phi$$
$$8 \text{coſ.} \Phi^4 = \text{coſ.} 4\Phi + 4 \text{coſ.} 2\Phi + \tfrac{1}{2}.6$$
$$16 \text{coſ.} \Phi^5 = \text{coſ.} 5\Phi + 5 \text{coſ.} 3\Phi + 10 \text{coſ.} \Phi$$
$$32 \text{coſ.} \Phi^6 = \text{coſ.} 6\Phi + 6 \text{coſ.} 4\Phi + 15 \text{coſ.} 2\Phi + \tfrac{1}{2}.20$$
$$64 \text{coſ.} \Phi^7 = \text{coſ.} 7\Phi + 7 \text{coſ.} 5\Phi + 21 \text{coſ.} 3\Phi + 35 \text{coſ.} \Phi$$
$$182 \text{coſ.} \Phi^8 = \text{coſ.} 8\Phi + 8 \text{coſ.} 6\Phi + 28 \text{coſ.} 4\Phi + 56 \text{coſ.} 2\Phi + \tfrac{1}{2}70$$

etc.

## COROLL. 4.

7. Si exponens $n$ ſit numerus negatiuus; expreſſio inuenta in ſeriem abit infinitam, ſicque fiet:

$$\frac{1}{2 \text{coſ.} \Phi} = \text{coſ.} \Phi - \text{coſ.} 3\Phi + \text{coſ.} 5\Phi - \text{coſ.} 7\Phi + \text{coſ.} 9\Phi - \text{etc.}$$
$$\frac{1}{4 \text{coſ.} \Phi^2} = \text{coſ.} 2\Phi - 2 \text{coſ.} 4\Phi + 3 \text{coſ.} 6\Phi - 4 \text{coſ.} 8\Phi + 5 \text{coſ.} 10\Phi - 6 \text{coſ.} 12\Phi + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{8 \text{coſ.} \Phi^3} = \text{coſ.} 3\Phi - 3 \text{coſ.} 5\Phi + 6 \text{coſ} 7\Phi - 10 \text{coſ.} 9\Phi + 15 \text{coſ.} 11\Phi - 21 \text{coſ.} 13\Phi + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{16 \text{coſ.} \Phi^4} = \text{coſ.} 4\Phi - 4 \text{coſ.} 6\Phi + 10 \text{coſ.} 8\Phi - 20 \text{coſ.} 10\Phi + 35 \text{coſ.} 12\Phi - 56 \text{coſ.} 14\Phi + \text{etc.}$$

etc.

## COROLL. 5.

8. Quin etiam ſi $n$ fuerit numerus fractus, ſeries notatu dignae prodeunt.

$$\sqrt{2\,\mathrm{coſ.}\Phi} = \mathrm{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{2}\mathrm{coſ.}\tfrac{3}{2}\Phi - \tfrac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\mathrm{coſ.}\tfrac{7}{2}\Phi + \tfrac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\mathrm{coſ.}\tfrac{11}{2}\Phi - \tfrac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\mathrm{coſ.}\tfrac{15}{2}\Phi + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{coſ.}\Phi}} = \mathrm{coſ.}\tfrac{1}{2}\Phi - \tfrac{1}{2}\mathrm{coſ.}\tfrac{5}{2}\Phi + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\mathrm{coſ.}\tfrac{9}{2}\Phi - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\mathrm{coſ.}\tfrac{13}{2} + \tfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\mathrm{coſ.}\tfrac{17}{2} - \text{etc.}$$

vbi coefficientes plane ſunt iidem, qui in extractione radicis ex binomio more conſueto erui ſolent.

## SCHOLION.

9. Plerumque commodius eſt, formulas in coroll. 3 traditas, ſi $n$ eſt numerus integer poſitiuus, ordine inuerſo exhibere. Tum autem conueniet eas in duas claſſes diſtribui, prout exponens $n$ fuerit numerus par, vel impar. Caſu quidem, quo $n$ eſt numerus par, eae ita ſe habebunt.

$$2\,\mathrm{coſ.}\Phi^2 = 1 + \mathrm{coſ.}2\Phi$$
$$8\,\mathrm{coſ.}\Phi^4 = 3 + 4\,\mathrm{coſ.}2\Phi + \mathrm{coſ.}4\Phi$$
$$32\,\mathrm{coſ.}\Phi^6 = 10 + 15\,\mathrm{coſ.}2\Phi + 6\,\mathrm{coſ.}4\Phi + \mathrm{coſ.}6\Phi$$
$$128\,\mathrm{coſ.}\Phi^8 = 35 + 56\,\mathrm{coſ.}2\Phi + 28\,\mathrm{coſ.}4\Phi + 8\,\mathrm{coſ.}6\Phi + \mathrm{coſ.}8\Phi$$
$$512\,\mathrm{coſ.}\Phi^{10} = 126 + 210\,\mathrm{coſ.}2\Phi + 120\,\mathrm{coſ.}4\Phi + 45\,\mathrm{coſ.}6\Phi + 10\,\mathrm{coſ.}8\Phi + \mathrm{coſ.}10\Phi$$
$$2048\,\mathrm{coſ.}\Phi^{12} = 462 + 792\,\mathrm{coſ.}2\Phi + 495\,\mathrm{coſ.}4\Phi + 220\,\mathrm{coſ.}6\Phi + 66\,\mathrm{coſ.}8\Phi + 12\,\mathrm{coſ.}10\Phi + \mathrm{coſ.}12\Phi$$

etc.

In genere autem ſi fuerit $n = 2\nu$ erit

$$2^{2\nu-1}\mathrm{coſ.}\Phi^{2\nu} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu} + \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu-1)}\mathrm{coſ.}2\Phi$$
$$+ \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+3)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu-2)}\mathrm{coſ.}4\Phi + \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+4)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu-3)}\mathrm{coſ.}6\Phi$$
$$+ \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+5)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu-4)}\mathrm{coſ.}8\Phi + \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+6)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu-5)}\mathrm{coſ.}10\Phi$$

etc.

Altero deinde caſu, quo eſt $n$ numerus impar, erit

1 coſ.

$$1\,\text{coſ.}\,\Phi = \text{coſ.}\,\Phi$$
$$4\,\text{coſ.}\,\Phi^3 = 3\,\text{coſ.}\,\Phi + \text{coſ.}\,3\Phi$$
$$16\,\text{coſ.}\,\Phi^5 = 10\,\text{coſ.}\,\Phi + 5\,\text{coſ.}\,3\Phi + \text{coſ.}\,5\Phi$$
$$64\,\text{coſ.}\,\Phi^7 = 35\,\text{coſ.}\,\Phi + 21\,\text{coſ.}\,3\Phi + 7\,\text{coſ.}\,5\Phi + \text{coſ.}\,7\Phi$$
$$256\,\text{coſ.}\,\Phi^9 = 126\,\text{coſ.}\,\Phi + 84\,\text{coſ.}\,3\Phi + 36\,\text{coſ.}\,5\Phi + 9\,\text{coſ.}\,7\Phi + \text{coſ.}\,9\Phi$$
$$1024\,\text{coſ.}\,\Phi^{11} = 462\,\text{coſ.}\,\Phi + 330\,\text{coſ.}\,3\Phi + 165\,\text{coſ.}\,5\Phi + 55\,\text{coſ.}\,7\Phi + 11\,\text{coſ.}\,9\Phi + \text{coſ.}\,11\Phi$$

etc.

in genere autem ſi ſit $n = 2\nu - 1$ erit

$$2^{2\nu-2}\,\text{coſ.}\,\Phi^{2\nu-1} = \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\nu-1)}\,\text{coſ.}\,\Phi + \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\nu-2)}\,\text{coſ.}\,3\Phi$$
$$+ \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+3)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\nu-3)}\,\text{coſ.}\,5\Phi + \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+4)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\nu-4)}\,\text{coſ.}\,7\Phi$$
$$+ \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+5)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\nu-5)}\,\text{coſ.}\,9\Phi + \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+6)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(\nu-6)}\,\text{coſ.}\,11\Phi$$

etc.

## PROBLEMA 11.

10. Poteſtatem quamcunque ſinus cuiuspiam anguli in ſinus coſinusue ſimplices conuertere, ita vt nusquam duo ſinus vel coſinus occurrant in ſe inuicem multiplicati.

## SOLVTIO.

Hoc problema ex praecedenti facile ſoluitur. Poſito enim $\Phi = 90^\circ - \psi$, fit coſ. $\Phi =$ ſin. $\psi$, ideoque expreſſio pro poteſtate coſ. $\Phi^n$ inuenta iam pro poteſtate ſin. $\psi^n$ valebit. Tum autem erit:

$$\text{coſ.}\,2\Phi = -\,\text{coſ.}\,2\psi \;;\quad \text{coſ.}\,3\Phi = -\,\text{ſin.}\,3\psi$$
$$\text{coſ.}\,4\Phi = +\,\text{coſ.}\,4\psi \;;\quad \text{coſ.}\,5\Phi = +\,\text{ſin.}\,5\psi$$
$$\text{coſ.}\,6\Phi = -\,\text{coſ.}\,6\psi \;;\quad \text{coſ.}\,7\Phi = -\,\text{ſin.}\,7\psi \text{ etc.}$$

 Quo-

Quoties ergo $n$ eſt numerus integer, pro fractis enim haec reductio minus commode inſtitui poteſt, ſequentes obtinebuntur reductiones:

$$1\,\text{ſin.}\,\psi = \text{ſin.}\,\psi$$
$$2\,\text{ſin.}\,\psi^2 = -\text{coſ.}\,2\psi + \tfrac{1}{2}.\,2$$
$$4\,\text{ſin.}\,\psi^3 = -\,\text{ſin.}\,3\psi + 3\,\text{ſin.}\,\psi$$
$$8\,\text{ſin.}\,\psi^4 = +\text{coſ.}\,4\psi - 4\,\text{coſ.}\,2\psi + \tfrac{1}{2}.\,6$$
$$16\,\text{ſin.}\,\psi^5 = +\,\text{ſin.}\,5\psi - 5\,\text{ſin.}\,3\psi + 10\,\text{ſin.}\,\psi$$
$$32\,\text{ſin.}\,\psi^6 = -\text{coſ.}\,6\psi + 6\,\text{coſ.}\,4\psi - 15\,\text{coſ.}\,2\psi + \tfrac{1}{2}.\,20$$
$$64\,\text{ſin.}\,\psi^7 = -\,\text{ſin.}\,7\psi + 7\,\text{ſin.}\,5\psi - 21\,\text{ſin.}\,3\psi + 35\,\text{ſin.}\,\phi$$
$$128\,\text{ſin.}\,\psi^8 = +\text{coſ.}\,8\psi - 8\,\text{coſ.}\,6\psi + 28\,\text{coſ.}\,4\psi - 56\,\text{coſ.}\,2\psi + \tfrac{1}{2}.\,70$$

etc.

Pro valoribus autem negatiuis ipſius $n$ habebitur:

$$\frac{1}{2\,\text{ſin.}\,\psi} = +\text{ſin.}\,\psi + \text{ſin.}\,3\psi + \text{ſin.}\,5\psi + \text{ſin.}\,7\psi + \text{ſin.}\,9\psi + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{4\,\text{ſin.}\,\psi^2} = -\text{coſ.}\,2\psi - 2\,\text{coſ.}\,4\psi - 3\,\text{coſ.}\,6\psi - 4\,\text{coſ.}\,8\psi - 5\,\text{coſ.}\,10\psi - \text{etc.}$$
$$\frac{1}{8\,\text{ſin.}\,\psi^3} = -\text{ſin.}\,3\psi - 3\,\text{ſin.}\,5\psi - 6\,\text{ſin.}\,7\psi - 10\,\text{ſin.}\,9\psi - 15\,\text{ſin.}\,11\psi - \text{etc.}$$
$$\frac{1}{16\,\text{ſin.}\,\psi^4} = +\text{coſ.}\,4\psi + 4\,\text{coſ.}\,6\psi + 10\,\text{coſ.}\,8\psi + 20\,\text{coſ.}\,10\psi + 53\,\text{coſ.}\,12\psi + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{32\,\text{ſin.}\,\psi^5} = +\text{ſin.}\,5\psi + 5\,\text{ſin.}\,7\psi + 15\,\text{ſin.}\,9\psi + 35\,\text{ſin.}\,11\psi + 70\,\text{ſin.}\,13\psi + \text{etc.}$$

etc.

Hinc ergo qnadruplices formulae generales eliciuntur, prout $n$ fuerit numerus formae vel $4m$, vel $4m-1$, vel $4m-2$, vel $4m-3$, eaeque erunt:

$$2^{4m-1}\,\text{ſin.}\,\psi^{4m} = \text{coſ.}\,4m\psi - 4m\,\text{coſ.}\,(4m-2)\psi + \frac{4m(4m-1)}{1.\;2.}\,\text{coſ.}\,(4m-4)\psi$$
$$-\frac{4m(4m-1)(4m-2)}{1.\;2.\;3.}\,\text{coſ.}\,(4m-6)\psi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+\tfrac{1}{2}.\;\frac{4m(4m-1)(4m-2)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2m+1)}{1.\;2.\;3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;2m}$$

$2^{4m-2}$

$$2^{4m-2}\operatorname{ſin}.\psi^{4m-1} = -\operatorname{ſin}.(4m-1)\psi + (4m-1)\operatorname{ſin}.(4m-3)\psi - \frac{(4m-1)(4m-2)}{1.\quad 2}\operatorname{ſin}.(4m-5)\psi$$
$$+\frac{(4m-1)(4m-2)(4m-3)}{1.\quad 2.\quad 3.}\operatorname{ſin}.(4m-7)\psi \ldots$$
$$+\frac{(4m-1)(4m-2)(4m-3)\ldots\ldots(2m+1)}{1\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots(2m-1)}\operatorname{ſin}.\psi$$

$$2^{4m-3}\operatorname{ſin}.\psi^{4m-2} = -\operatorname{coſ}.(4m-2)\psi + (4m-2)\operatorname{coſ}.(4m-4)\psi$$
$$-\frac{(4m-2)(4m-3)}{1.\quad 2.}\operatorname{coſ}.(4m-6)\psi + \frac{(4m-2)(4m-3)(4m-4)}{1.\quad 2.\quad 3.}\operatorname{coſ}.(4m-8)\psi \ldots$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(4m-2)(4\mu-3)(4m-4)\ldots\ldots(2m)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(2m-1)}$$

$$2^{4m-4}\operatorname{ſin}.\psi^{4m-3} = +\operatorname{ſin}.(4m-3)\psi - (4m-3)\operatorname{ſin}.(4m-5)\psi$$
$$+\frac{(4m-3)(4m-4)}{1.\quad 2.}\operatorname{ſin}.(4m-7)\psi - \frac{(4m-3)(4m-4)(4m-5)}{1.\quad 2.\quad 3.}\operatorname{ſin}.(4m-9)\psi \ldots$$
$$+\frac{(4m-3)(4m-4)(4m-5)\ldots\ldots(2m)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots\ldots(2m-2)}\operatorname{ſin}\psi$$

Simili modo ſi $n$ ſit numerus negatiuus integer quaternas habebimus formulas generales:

$$\frac{1}{2^{4m}\operatorname{ſin}.\psi^{4m}} = +\operatorname{coſ}.4m\psi + 4m\operatorname{coſ}.(4m+2)\psi + \frac{4m(4m+1)}{1.\quad 2.}\operatorname{coſ}.(4m+4)\psi$$
$$+\frac{4m(4m+1)(4m+2)}{1.\quad 2.\quad 3}\operatorname{coſ}.(4m+6)\psi + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2^{4m+1}\operatorname{ſin}\psi^{4m+1}} = +\operatorname{ſin}.(4m+1)\psi + (4m+1)\operatorname{ſin}.(4m+3)\psi$$
$$+\frac{(4m+1)(4m+2)}{1\quad 2}\operatorname{ſin}.(4m+5)\psi + \frac{(4m+1)(4m+2)(4m+3)}{1.\quad 2.\quad 3}\operatorname{ſin}.(4m+7)\psi + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2^{4m+2}\operatorname{ſin}\psi^{4m+2}} = -\operatorname{coſ}.(4m+2)\psi - (4m+2)\operatorname{coſ}.(4m+4)\psi$$
$$-\frac{(4m+2)(4m+3)}{1.\quad 2}\operatorname{coſ}.(4m+6)\psi - \frac{(4m+2)(4m+3)(4m+4)}{1.\quad 2.\quad 3}\operatorname{coſ}.(4m+8)\psi - \text{etc.}$$

$$\frac{1}{2^{4m+3}\operatorname{ſin}\psi^{4m+3}} = -\operatorname{ſin}.(4m+3)\psi - (4m+3)\operatorname{ſin}.(4m+5)\psi$$
$$-\frac{(4m+3)(4m+4)}{1.\quad 2}\operatorname{ſin}.(4m+7)\psi - \frac{(4m+3)(4m+4)(4m+5)}{1.\quad 2.\quad 3}\operatorname{ſin}.(4m+9)\psi - \text{etc.}$$

Sicque quoties $n$ eſt numerus integer, ſiue poſitiuus, ſiue negatiuus, poteſtas ſinus $\operatorname{ſin}.\psi^n$ deſiderato modo reſoluitur. Q. E. F.

## COROLL. 1.

11. Quoties ergo $n$ eſt numerus par, ſiue poſitiuus, ſiue negatiuus, poteſtas ſin. $\psi^n$ reſoluitur in coſinus ſimplices angulorum multiplorum ipſius $\psi$. Sin autem $n$ fuerit numerus impar, poteſtas ſin. $\psi^n$ reſoluitur in ſinus ſimplices angulorum multiplorum ipſius $\psi$.

## COROLL. 2.

12. Quodſi $n$ fuerit numerus integer poſitiuus, atque expreſſiones inuentae retro diſponantur, quaternae formulae ſupra datae in binas incidunt. Pro paribus enim exponentibus erit:

$$2\sin.\psi^2 = 1 - \cos.2\psi$$
$$8\sin.\psi^4 = 3 - 4\cos.2\psi + \cos.4\psi$$
$$32\sin.\psi^6 = 10 - 15\cos.2\psi + 6\cos.4\psi - \cos.6\psi$$
$$128\sin.\psi^8 = 35 - 56\cos.2\psi + 28\cos.4\psi - 8\cos.6\psi + \cos.8\psi$$
$$512\sin.\psi^{10} = 126 - 210\cos.2\psi + 120\cos.4\psi - 45\cos.6\psi + 10\cos.8\psi - \cos.10\psi$$
$$2048\sin.\psi^{12} = 462 - 792\cos.2\psi + 495\cos.4\psi - 220\cos.6\psi + 66\cos.8\psi - 12\cos.10\psi + \cos.12\psi$$

etc.

atque generatim erit:

$$2^{2\nu-1}\sin.\psi^{2\nu} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu} - \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu-1)}\cos.2\psi$$
$$+ \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+3)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu-2)}\cos.4\psi - \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+4)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu-3)}\cos.6\psi$$
$$+ \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+5)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu-4)}\cos.8\psi - \frac{2\nu(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+6)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(\nu-5)}\cos.10\psi$$

etc.

COROL.

## COROLL. 3.

13. Pro imparibus autem exponentibus habebitur:

$$1\,\text{ſin.}\,\psi = \text{ſin.}\,\psi$$
$$4\,\text{ſin.}\,\psi^3 = 3\,\text{ſin.}\,\psi - \text{ſin.}\,3\psi$$
$$16\,\text{ſin.}\,\psi^5 = 10\,\text{ſin.}\,\psi - 5\,\text{ſin.}\,3\psi + \text{ſin.}\,5\psi$$
$$64\,\text{ſin.}\,\psi^7 = 35\,\text{ſin.}\,\psi - 21\,\text{ſin.}\,3\psi + 7\,\text{ſin.}\,5\psi - \text{ſin.}\,7\psi.$$
$$256\,\text{ſin.}\,\psi^9 = 126\,\text{ſin.}\,\psi - 84\,\text{ſin.}\,3\psi + 36\,\text{ſin.}\,5\psi - 9\,\text{ſin.}\,7\psi + \text{ſin.}\,9\psi$$
$$1024\,\text{ſin.}\,\psi^{11} = 462\,\text{ſin.}\,\psi - 330\,\text{ſin.}\,3\psi + 165\,\text{ſin.}\,5\psi - 55\,\text{ſin.}\,7\psi + 11\,\text{ſin.}\,9\psi - \text{ſin.}\,11\psi$$

etc.

pro quibus formula generalis eſt

$$2^{2\nu-2}\,\text{ſin.}\,\psi^{2\nu-1} = \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+1)}{1.\ 2.\ \ldots(\nu-1)}\,\text{ſin.}\,\psi - \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+2)}{1.\ 2.\ \ldots(\nu-2)}\,\text{ſin.}\,3\psi$$
$$+ \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+3)}{1.\ 2.\ \ldots(\nu-3)}\,\text{ſin.}\,5\psi - \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+4)}{1.\ 2.\ \ldots(\nu-4)}\,\text{ſin.}\,7\psi$$
$$+ \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+5)}{1.\ 2\ \ldots(\nu-5)}\,\text{ſin.}\,9\psi - \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\ldots(\nu+6)}{1.\ 2\ \ldots(\nu-6)}\,\text{ſin.}\,11\psi$$

etc.

## SCHOLION.

14. Patet ergo, ſi poteſtas ſinus cuiuspiam anguli velut ſin. $\Phi^n$ occurrat, reſolutionem commode inſtitui non poſſe, niſi $n$ ſit numerus integer, ſiue ſit poſitiuus, ſiue negatiuus: hoc autem caſu quadruplices prodire formulas, prout exponens $n$ fuerit numerus formae vel $4a$, vel $4a+1$, vel $4a+2$, vel $4a+3$; quae diſtinctio non eſt neceſſaria, ſi quaeſtio eſt de poteſtate coſinus cuiuspiam. Interim tamen ſi $n$ eſt numerus fractus, formulae pro reſolutione poteſtatum coſinus huc non difficulter traducuntur, cum ſinus in coſi-

num

num transmutari poſſit. Poſito enim $\phi = 90^\circ - \phi$ erit

$$\sqrt{2\,\text{ſin.}\,\phi} = \text{coſ.}\tfrac{1}{2}\phi + \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\tfrac{3}{2}\phi - \tfrac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\text{coſ.}\tfrac{7}{2}\phi + \tfrac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\text{coſ.}\tfrac{11}{2}\phi - \text{etc.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\text{ſin.}\,\psi}} = \text{coſ.}\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{2}\text{coſ.}\tfrac{5}{2}\phi + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\text{coſ.}\tfrac{9}{2}\phi - \tfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\text{coſ.}\tfrac{17}{2}\phi + \text{etc.}$$

Verum ſi productum proponatur huiusmodi ſin. $\phi^m$. coſ. $\phi^n$, quod in ſimplices ſinus coſinusue ſit reſoluendum, hoc commode fieri nequit, niſi exponens $m$ ſit numerus integer, ſiue poſitiuus, ſiue negatiuus, tumque quatuor conſtituendi ſunt caſus, prout $m$ fuerit numerus formae, vel $4\alpha$, vel $4\alpha + 1$, vel $4\alpha + 2$, vel $4\alpha + 3$. Secundum hos ergo quaternos caſus reſolutionem formulae ſin. $\phi^m$, coſ. $\phi^n$ eruam, vbi quidem notandum eſt, exponentem $n$ nulli reſtrictioni eſſe ſubiectum, ita vt nonſolum numeros integros, ſed etiam fractos, atque adeo irrationales, denotare poſſit.

## PROBLEMA 3.

15. Huiusmodi productum ſin. $\phi^m$. coſ. $\phi^n$, in quo exponens $m$ eſt numerus integer formae $4\alpha$, in ſinus coſinusue ſimplices reſoluere.

## SOLVTIO.

Ponatur coſ. $\phi + \sqrt{-1}$. ſin. $\phi = u$ et coſ. $\phi - \sqrt{-1}$. ſin. $\phi = v$, erit;

$$\text{coſ.}\ \phi = \frac{u+v}{2} \text{ et ſin. } \phi = \frac{u-v}{2\sqrt{-1}}$$

$$\text{et coſ.}\,\nu\phi = \frac{u^\nu + v^\nu}{2} \text{ et ſin.}\,\nu\phi = \frac{u^\nu - v^\nu}{2\sqrt{-1}}$$

propter-

propterea quod per lemma habemus:

$\text{coſ.}\, \nu\Phi + \sqrt{-1}\,.\ \text{ſin.}\, \nu\Phi = u^{\nu}$ et $\text{coſ.}\, \nu\Phi - \sqrt{-1}\,.\ \text{ſin.}\, \nu\Phi = v^{\nu}$

Formula ergo propoſita ſin. $\Phi^m$ coſ. $\Phi^n$ abit in $\frac{(u-v)^m (u+v)^n}{2^m (\sqrt{-1})^m \cdot 2^n}$

et quia $m$ eſt numerus integer formae $4\alpha$ erit $(\sqrt{-1})^m = +1$; ideoque habebitur:

$$\text{ſin.}\, \Phi^m \,\text{coſ.}\, \Phi^n = \frac{(u-v)^m (u+v)^n}{2^{m+n}} \text{ ſiue}$$

$$2^{m+n}\, \text{ſin.}\, \Phi^m \,\text{coſ.}\, \Phi^n = (u-v)^m (u+v)^n = u^{m+n} \left(1-\frac{v}{u}\right)^m \left(1+\frac{v}{u}\right)^n$$

Sit breuitatis gratia $\frac{v}{u} = z$, atque in ſeriem conuerti oportet hanc expreſſionem $(1-z)^m (1+z)^n$, quae vocetur $= S$, eritque

$lS = ml(1-z) + nl(1+z)$ et differentiando

$$\frac{dS}{S} = -\frac{m\,dz}{1-z} + \frac{n\,dz}{1+z} = \frac{(n-m)\,dz - (m+n)\,z\,dz}{1-zz}$$

Ponatur $n-m=f$ et $m+n=g$, vt ſit

$$(1-zz)\frac{dS}{dz} - fS + gSz = 0$$

Iam ſtatuatur

$$S = 1 + Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + Gz^7 + \text{etc.}$$

ac facta ſubſtitutione prodibit:

$$\left.\begin{array}{llllllll} A + 2Bz + 3Cz^2 + 4Dz^3 + 5Ez^4 + 6Fz^5 + 7Gz^6 + \text{etc.} \\ \quad\ - A \quad - 2B \quad - 3C \quad - 4D \quad - 5E \quad - \text{etc.} \\ -f - fA \quad - fB \quad - fC \quad - fD \quad - fE \quad - fF \quad - \text{etc.} \\ \quad + g \quad + gA \quad + gB \quad + gC \quad + gD \quad + gE \quad + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

Coefficientes ergo aſſumti A, B, C, etc. ita determinabuntur, vt ſit



$A = f$

$$\begin{aligned}
A &= f\\
2B &= fA - g\\
3C &= fB - (g-1)A\\
4D &= fC - (g-2)B\\
5E &= fD - (g-3)C\\
6F &= fE - (g-4)D\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

hisque valoribus inuentis erit: $2^{m+n}$ ſin. $\Phi^m$ coſ. $\Phi^n =$ $u^g + Au^{g-1}v + Bu^{g-2}v^2 + Cu^{g-3}v^3 + Du^{g-4}v^4 +$ etc. Cum autem ob $m$ numerum parem ſit $2^{m+n}$ ſin. $\Phi^m$ coſ. $\Phi =$ $(v-u)^m (v+u)^n$ erit ſimili modo $2^{m+n}$ ſin. $\Phi^n$ coſ. $\Phi =$ $v^g + Av^{g-1}u + Bv^{g-2}u^2 + Cv^{g-3}v^3 + Dv^{g-4}u^4 +$ etc.

His igitur formulis addendis erit ob $vu = 1$;

$$2 \cdot 2^{m+n} \text{ ſin. } \Phi^m \text{ coſ. } \Phi^n = u^g + v^g + A(u^{g-2} + v^{g-2}) + B(u^{g-4} + v^{g-4}) + C(u^{g-6} + v^{g-6}) + D(u^{g-8} + v^{g-8}) \text{ etc.}$$

et cum in genere ſit $u^\nu + v^\nu = 2$ coſ. $\nu\Phi$ erit:

$$2^{m+n} \text{ ſin. } \Phi^m \text{ coſ. } \Phi^n = \text{coſ. } g\Phi + A \text{ coſ. } (g-2)\Phi + B \text{ coſ. } (g-4)\Phi + C \text{ coſ. } (g-6)\Phi + \text{etc.}$$

poſito breuitatis gratia $m + n = g$ et $n - m = f$, ſubſtitutisque in locum coefficientium A, B, C, D, etc. valoribus ante indicatis.

Q. E. F.

## PROBLEMA IV.

16. *Si* exponens $m$ fuerit numerus huius formae $4\alpha + 2$ ſeu impariter par, productum ſin. $\Phi^m$ coſ. $\Phi^n$ in ſinus coſinusue ſimplices reſoluere.

SOLV-

## SOLVTIO.

Poſito vt ante $\cos.\Phi + \surd -1 . \sin.\Phi = u$ et $\cos.\Phi - \surd -1 . \sin.\Phi = v$, prodibit

$$\sin.\Phi^m \cos.\Phi^n = \frac{(u-v)^m}{2^m(\surd -1)^m} \cdot \frac{(u+v)^n}{2^n}$$

Quia autem $m$ eſt numerus impariter par, erit $(\surd -1)^m = -1$ erit $-2^{m+n}\sin.\Phi^m\cos.\Phi^n = (u-v)^m(u+v)^n$

et ob $m$ numerum parem erit quoque

$$-2^{m+n}\sin.\Phi^m\cos.\Phi^n = (v-u)^m(v+u)^n$$

quarum formularum vtraque vt ante reſoluatur; ſcilicet poſito $n-m=f$ et $m+n=g$, et coefficientibus A, B, C etc. ita aſſumtis, vt ſit

$$A = f \qquad 2B = fA - g$$
$$3C = fB - (g-1)A \qquad 4D = fC - (g-2)B$$
$$5E = fD - (g-3)C \qquad 6F = fE - (g-4)D$$

etc.

ſumma illarum formularum praebebit:

$$-2 . 2^{m+n}\sin.\Phi^m\cos.\Phi^n = u^g + v^g + A(u^{g-2} + v^{g-2}) + B(u^{g-4} + v^{g-4}) + \text{etc.}$$

quae progreſſio vt ante ad coſinus ſimplices angulorum multiplorum ipſius $\Phi$ reducitur, ita vt ſit:

$$2^{m+n}\sin.\Phi^m\cos.\Phi^n = -\cos.g\Phi - A\cos.(g-2)\Phi - B\cos.(g-4)\Phi - C\cos.(g-6)\Phi - \text{etc.}$$

Q. E. F.

## PROBLEMA V.

17. Si exponens $m$ fuerit numerus impar formae $4\alpha+1$, productum ſin. $\Phi^m$ coſ. $\Phi^n$ in ſinus coſinusue ſimplices reſoluere.

## SOLVTIO.

Poſito iterum coſ. $\Phi+\sqrt{-1}$. ſin. $\Phi=u$ et coſ. $\Phi-\sqrt{-1}$. ſin. $\Phi=v$, vt fiat

$$\text{ſin.}\,\Phi^m\,\text{coſ.}\,\Phi^n=\frac{(u-v)^m}{2^m(\sqrt{-1})^m}\cdot\frac{(u+v)^n}{2^n}$$

ob $m$ numerum formae $4\alpha+1$ erit $(\sqrt{-1})^m=\sqrt{-1}$, ideoque habebitur:

$$2^{m+n}\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,\Phi^m\,\text{coſ.}\,\Phi^n=(u-v)^m(u+v)^n.$$

At ob $m$ numerum imparem erit $(u-v)^m=-(v-u)^m$ hincque

$$2^{m+n}\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin.}\,\Phi^m\,\text{coſ.}\,\Phi^n=-(v-u)^m(v+u)^n$$

Hanc ob rem his formulis addendis et per $2\sqrt{-1}$ dividendis, fiet

$$2^{m+n}\,\text{ſin.}\,\Phi^m\,\text{coſ.}\,\Phi^n=\frac{(u-v)^m(u+v)^n-(v-u)^m(v+u)^n}{2\sqrt{-1}}$$

poſitoque $m+n=g$ et $n-m=f$, ſumtisque

$$A=f \qquad 2B=fA-g$$
$$3C=fB-(g-1)A \qquad 4D=fC-(g-2)B$$
$$5E=fD-(g-3)C \qquad 6F=fE-(g-4)D$$

etc.

obtinebitur:

$$2^{m+n}\,\text{ſin.}\,\Phi^m\,\text{coſ.}\,\Phi^n=\frac{u^g-v^g}{2\sqrt{-1}}+\frac{A(u^{g-2}-v^{g-2})}{2\sqrt{-1}}+\frac{B(u^{g-4}-v^{g-4})}{2\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$

Verum

Verum ex lemmate eſt $\frac{u^\nu - v^\nu}{2\sqrt{-1}} = \text{ſin.}\, \nu\, \Phi$, vnde oritur

$$2^{m+n}\text{ſin.}\,\Phi^m \text{coſ.}\,\Phi^n = \text{ſin.}\,g\,\Phi + A\,\text{ſin.}\,(g-2)\Phi + B\,\text{ſin.}(g-4)\Phi$$
$$+ C\,\text{ſin.}\,(g-6)\,\Phi + \text{etc.}$$

Q. E. F.

## PROBLEMA VI.

18. Si exponens $m$ ſit numerus impar formae $4\alpha - 1$, reſoluere hoc productum ſin. $\Phi^m$ coſ. $\Phi^n$ in ſinus coſinusue ſimplices.

## SOLVTIO.

Poſito denuo coſ. $\Phi + \sqrt{-1}$. ſin. $\Phi = u$ et coſ. $\Phi - \sqrt{-1}$. ſin. $\Phi = v$, vt ſit

$$\text{ſin.}\,\Phi^m \text{coſ.}\,\Phi^n = \frac{(u-v)^m}{2^m(\sqrt{-1})^m} \cdot \frac{(u+v)^n}{2^n}$$

ob $m$ numerum formae $4\alpha - 1$ erit $(\sqrt{-1})^m = -\sqrt{-1}$, ideoque

$$2^{m+n}\,\text{ſin.}\,\Phi^m\,\text{coſ.}\,\Phi^n = -\frac{(u-v)^m\,(u+v)^n}{\sqrt{-1}}$$

At ob $m$ numerum imparem erit $(u-v)^m = -(v-u)^m$; ergo

$$2^{m+n}\text{ſin.}\,\Phi^m \text{coſ.}\,\Phi^n = +\frac{(v-u)^m (v+u)^n}{\sqrt{-1}}$$

quarum expreſſionum ſemiſumma eſt:

$$2^{m+n}\,\text{ſin.}\,\Phi^m \text{coſ.}^n = -\frac{(u-v)^m\,(u+v)^n + (v-u)^m\,(v+u)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Si iam ponatur $n - m = f$, $m + n = g$, coefficientesque A, B, C etc. per ſequentes formulas determinentur

 $A = f$

$$A = f \qquad 2B = fA - g$$
$$3C = fB - (g-1)A \qquad 4D = fC - (g-2)B$$
$$5E = fD - (g-3)C \qquad 6F = fE - (g-4)D$$
etc.

reperietur:

$$2^{m+n}\,\text{ſin.}\,\Phi^m \,\text{coſ.}\,\Phi^n = \frac{-(u^g - v^g)}{2\sqrt{-1}} - \frac{A(u^{g-2} - v^{g-2})}{2\sqrt{-1}} - \frac{B(u^{g-4} - v^{g-4})}{2\sqrt{-1}} - \text{etc.}$$

atque ob $\frac{u^\nu - v^\nu}{2\sqrt{-1}} = \text{ſin.}\,\nu\,\Phi$ obtinebitur tandem

$$2^{m+n}\text{ſin.}\,\Phi^m\,\text{coſ.}\,\Phi^n = -\,\text{ſin.}\,g\,\Phi - A\,\text{ſin.}(g-2)\Phi - B\,\text{ſin.}(g-4)\Phi$$
$$-\,C\,\text{ſin.}(g-6)\,\Phi - \text{etc.}$$

Q. E. F.

COROLL. 1.

19. Productum ergo ſin. $\Phi^m$ coſ. $\Phi^n$ in coſinus ſimplices reſoluitur, ſi exponens $m$ fuerit numerus par: in ſinus autem ſimplices, ſi exponens $m$ fuerit numerus impar. Atque ſi exponens $m$ ſit vel $4\alpha$, vel $4\alpha+1$, ſinguli termini erunt poſitiui, ſin autem $m$ ſit vel $4\alpha+2$ vel $4\alpha-1$, ſeu $4\alpha+3$, termini ſigno negatiuo ſunt affecti.

COROLL. 2.

20. His regulis tam ratione ſignorum, quam vtrum ſinus, an coſinus, accipi debeant, obſeruatis, reſolutio horum quaternorum caſuum requirit eandem coefficientium A, B, C etc. determinationem, quae ita ſe habet, vt poſito $n-m=f$ et $m+n=g$ eſſe debeat:

A=f

$$\begin{aligned}
A &= f \\
2B &= fA - g \\
3C &= fB - (g-1)A \\
4D &= fC - (g-2)B \\
5E &= fD - (g-3)C \\
6F &= fE - (g-4)D \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

## COROLL. 3.

21. Vel hos coefficientes ita definiri oportet, vt ſit $(1-z)^m(1+z)^n = 1 + Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + \text{etc.}$ ex qua reſolutione hi coefficientes ſaepe facilius eruentur.

## COROLL. 4

22. Quoniam hi coefficientes in genere in fractiones abeunt, ſi hoc incommodum vitare velimus, ſtatim ponatur

$$(1-z)^m(1+z)^n = 1 + \frac{\alpha}{1}z + \frac{\beta}{1\cdot 2}z^2 + \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \frac{\delta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}z^4 + \text{etc.}$$

vt ſit

$$A = \frac{\alpha}{1};\quad B = \frac{\beta}{1,2};\quad C = \frac{\gamma}{1.2.3}$$
$$D = \frac{\delta}{1.2.3.4};\quad E = \frac{\varepsilon}{1.2.3.4.5};\quad E = \frac{\zeta}{1.2.3.4.5.6}$$

tum autem erit:

$$\begin{aligned}
\alpha &= f \\
\beta &= f\alpha - g \\
\gamma &= f\beta - 2(g-1)\alpha \\
\delta &= f\gamma - 3(g-2)\beta \\
\varepsilon &= f\delta - 4(g-3)\gamma \\
\zeta &= f\varepsilon - 5(g-4)\delta \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

## COROLL. 5.

23. Si hi valores euoluuntur, reperietur

$$\alpha = f$$
$$\beta = ff - g$$
$$\gamma = f^3 - (3g-2)f$$
$$\delta = f^4 - (6g-8)ff + 3g(g-2)$$
$$\varepsilon = f^5 - (10g-20)f^3 + (15gg-50g+24)f$$
$$\zeta = f^6 - (15g-40)f^4 + (45gg-210g+184)ff - 15g(g-2)(g-4)$$
etc.

Verum difficile eſt harum formularum progreſſionem perſpicere eamque continuare, niſi determinationes ante indicatae in ſubſidium vocentur.

## COROLL. 6.

24. Valores coefficientum A, B, C, D, etc. etiam ita ex omnibus praecedentibus definiri poſſunt, vt ſit.

$$A = f$$
$$2B = fA - g$$
$$3C = fB - gA + f$$
$$4D = fC - gB + fA - g$$
$$5E = fD - gC + fB - gA + f$$
$$6F = fE - gD + fC - gB + fA - g$$
etc.

COROL.

## COROLL. 7.

25. Hinc ſtatim patet, ſi ſit $g = f$ ſeu $m = 0$, et $g = n$, fore $A = f$; $2B = (f-1)A$; $3C = (f-2)B$; $4D = (f-3)C$; etc.

ideoque:

$$A = n;\ B = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2};\ C = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3};\ D = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

At ſi ſit $g = -f$, ſeu $n = 0$, et $g = m$, erit

$A = f$; $2B = (f+1)A$; $3C = (f+2)B$; $4D = (f+3)C$, etc.

ideoque

$$A = -m;\ B = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2};\ C = -\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3};\ D = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4};$$

Hi autem ſunt caſus iam ante euoluti.

## SCHOLION I.

26. Quodſi pro exponentibus $m$ et $n$ ſucceſſiue numeri integri affirmatiui capiantur, ſequentes prodibunt reſolutiones:

$1 \operatorname{coſ.} \Phi = \operatorname{coſ.} \Phi$

$1 \operatorname{ſin.} \Phi = \operatorname{ſin.} \Phi$

---

$2 \operatorname{coſ.} \Phi^2 = + \operatorname{coſ.} 2\Phi + 1$

$2 \operatorname{ſin.} \Phi \operatorname{coſ.} \Phi = + \operatorname{ſin.} 2\Phi$

$2 \operatorname{ſin.} \Phi^2 = - \operatorname{coſ.} 2\Phi + 1$

---

$4 \operatorname{coſ.} \Phi^3 = + \operatorname{coſ.} 3\Phi + 3 \operatorname{coſ.} \Phi$

$4 \operatorname{ſin.} \Phi \operatorname{coſ.} \Phi^2 = + \operatorname{ſin.} 3\Phi + \operatorname{ſin.} \Phi$

$4 \operatorname{ſin.} \Phi^2 \operatorname{coſ.} \Phi = - \operatorname{coſ.} 3\Phi + \operatorname{coſ.} \Phi$

$4 \operatorname{ſin.} \Phi^3 = - \operatorname{ſin.} 3\Phi + 3 \operatorname{ſin.} \Phi$

---

CO-

23.

a = f

8 coſ. $\Phi^4$ = + coſ. 4 Φ + 4 coſ. 2 Φ + 3
8 ſin. Φ coſ. $\Phi^3$ = + ſin. 4 Φ + 2 ſin. 2 Φ
8 ſin. $\Phi^2$ coſ. $\Phi^2$ = − coſ. 4 Φ * + 1
8 ſin. $\Phi^3$ coſ. Φ = − ſin. 4 Φ + 2 ſin. 2 Φ
8 ſin. $\Phi^4$ = + coſ. 4 Φ − 4 coſ. 2 Φ + 3

---

16 coſ. $\Phi^5$ = + coſ. 5 Φ + 5 coſ. 3 Φ + 10 coſ. Φ
16 ſin. Φ coſ. $\Phi^4$ = + ſin. 5 Φ + 3 ſin. 3 Φ + 2 ſin. Φ
16 ſin. $\Phi^2$ coſ. $\Phi^3$ = − coſ. 5 Φ − coſ. 3 Φ + 2 coſ. Φ
16 ſin. $\Phi^3$ coſ. $\Phi^2$ = − ſin. 5 Φ + ſin. 3 Φ + 2 ſin. Φ
16 ſin. $\Phi^4$ coſ. Φ = + coſ. 5 Φ − 3 coſ. 3 Φ + 2 coſ. Φ
16 ſin. $\Phi^5$ = + ſin. 5 Φ − 5 ſin. 3 Φ + 10 ſin. Φ

---

32 coſ. $\Phi^6$ = + coſ. 6 Φ + 6 coſ. 4 Φ + 15 coſ. 2 Φ + 10
32 ſin. Φ coſ. $\Phi^5$ = + ſin. 6 Φ + 4 ſin. 5 Φ + 5 ſin. 2 Φ
32 ſin. $\Phi^2$ coſ. $\Phi^4$ = − coſ. 6 Φ − 2 coſ. 4 Φ + coſ. 2 Φ + 2
32 ſin. $\Phi^3$ coſ. $\Phi^3$ = − ſin. 6 Φ * + 3 ſin. 2 Φ
32 ſin. $\Phi^4$ coſ. $\Phi^2$ = + coſ. 6 Φ − 2 coſ. 4 Φ − coſ. 2 Φ + 2
32 ſin. $\Phi^5$ coſ. Φ = + ſin. 6 Φ − 4 ſin. 4 Φ + 5 ſin. 2 Φ
32 ſin. $\Phi^6$ = − coſ. 6 Φ + 6 coſ. 4 Φ − 15 coſ. 2 Φ + 10

---

64 coſ. $\Phi^7$ = + coſ. 7 Φ + 7 coſ. 5 Φ + 21 coſ. 3 Φ + 35 coſ. Φ
64 ſin. Φ coſ. $\Phi^6$ = + ſin. 7 Φ + 5 ſin. 5 Φ + 9 ſin. 3 Φ + 5 ſin. Φ
64 ſin. $\Phi^2$ coſ. $\Phi^5$ = − coſ. 7 Φ − 3 coſ. 5 Φ − coſ. 3 Φ + 5 coſ. Φ
64 ſin. $\Phi^3$ coſ. $\Phi^4$ = − ſin. 7 Φ − ſin. 5 Φ + 3 ſin. 3 Φ + 3 ſin. Φ
64 ſin. $\Phi^4$ coſ. $\Phi^3$ = + coſ. 7 Φ − coſ. 5 Φ − 3 coſ. 3 Φ + 3 coſ. Φ
64 ſin. $\Phi^5$ coſ. $\Phi^2$ = + ſin. 7 Φ − 3 ſin. 5 Φ + ſin. 3 Φ + 5 ſin. Φ
64 ſin. $\Phi^6$ coſ. Φ = − coſ. 7 Φ + 5 coſ. 5 Φ − 9 coſ. 3 Φ + 5 coſ. Φ
64 ſin. $\Phi^7$ = − ſin. 7 Φ + 7 ſin. 5 Φ − 21 ſin. 3 Φ + 35 ſin. Φ

Que-

Quemadmodum autem formulas has commodius eruere liceat, deinceps docebo, inde quod cuiusque ordinis prima ſeries ex praecedentibus eſt cognita.

## SCHOLION 2.

27. Sin autem alter exponentium $m$ et $n$ ſit numerus negatiuus, expreſſio inuenta ſeriem exhibebit infinitam, cuius formam in aliquot caſibus inueſtigare operae erit pretium. In hunc finem ſequentia exempla adiungere viſum eſt.

## EXEMPLVM 1.

28. *Tangentem cuiusque anguli* $\Phi$, *ſeu hanc expreſſionem* $\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}$, *in ſeriem conuertere, quae ſecundum ſinus ſimplices procedat*

Forma hac comparata cum generali ſin. $\Phi^m$ coſ. $\Phi^n$ erit $m=1$ et $n=-1$, vnde fit $f=-2$, et $g=0$, hincque elicientur valores ſequentes:

| | |
|---|---|
| $A=-2$ | $A=-2$ |
| $2B=+4$ | $B=+2$ |
| $3C=-4-2=-6$ | $C=-2$ |
| $4D=+4+4=+8$ | $D=+2$ |
| $5E=-4-6=-10$ | $E=-2$ |
| $6F=+4+8=+12$ | $F=+2$ |

etc.

Cum nunc ſit $m=1$, caſus ad probl. V pertinet, eritque

$$\frac{2^0\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}=\text{ſin.}\,0\Phi-2\,\text{ſin.}(-2\Phi)+2\,\text{ſin.}(-4\Phi)-2\,\text{ſin.}(-6\Phi)+\text{etc.}$$

vnde concluditur fore:

$$\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} = 2\,\text{ſin.}\,2\Phi - 2\,\text{ſin.}\,4\Phi + 2\,\text{ſin.}\,6\Phi - 2\,\text{ſin.}\,8\Phi + 2\,\text{ſin.}\,10\Phi - \text{etc.}$$

## EXEMPLVM 2.

29. *Cotangentem cuiusuis anguli* $\Phi$, *ſeu hanc expreſſionem* $\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi}$, *in ſeriem conuertere, quae ſecundum ſinus ſimplices procedat.*

Pro hoc caſu erit $m = -1$ et $n = 1$, vnde $f = 2$, et $g = 0$; ideoque obtinebitur

| | |
|---|---|
| $A = 2$ | $A = 2$ |
| $2B = 4 - 0;$ | $B = 2$ |
| $3C = 4 + 2 = 6$ | $C = 2$ |
| $4D = 4 + 4 = 8$ | $D = 2$ |
| $5E = 4 + 6 = 10$ | $E = 2$ |

etc.

At ob $m = -1$ hic caſus ad Probl. VI. pertinet, eritque

$$\frac{2^0\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi} = -\text{ſin.}\,0\Phi - 2\,\text{ſin.}\,(-2\Phi) - 2\,\text{ſin.}\,(-4\Phi) - 2\,\text{ſin.}\,(-6\Phi) - \text{etc.}$$

quae reducitur ad

$$\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi} = 2\,\text{ſin.}\,2\Phi + 2\,\text{ſin.}\,4\Phi + 2\,\text{ſin.}\,6\Phi + 2\,\text{ſin.}\,8\Phi + 2\,\text{ſin.}\,6\Phi + \text{etc.}$$

## EXEMPLVM 3.

30. *Hanc expreſſionem* $\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi^2}$ *in ſeriem conuertere.*

Ob $m = 1$ et $n = -2$ erit $f = -3$ et $g = -1$, vnde

$A = -3$

## SOLVTIO.

Poſito vt ante $\cos.\Phi + \surd-1.\sin.\Phi = u$ et $\cos.\Phi - \surd-1.\sin.\Phi = v$, prodibit

$$\sin.\Phi^m \cos.\Phi^n = \frac{(u-v)^m}{2^m(\surd-1)^m}\cdot\frac{(u+v)^n}{2^n}$$

Quia autem $m$ eſt numerus impariter par, erit $(\surd-1)^m = -1$ erit $-2^{m+n}\sin.\Phi^m\cos.\Phi^n = (u-v)^m(u+v)^n$

et ob $m$ numerum parem erit quoque

$$-2^{m+n}\sin.\Phi^m\cos.\Phi^n = (v-u)^m(v+u)^n$$

quarum formularum vtraque vt ante reſoluatur; ſcilicet poſito $n-m=f$ et $m+n=g$, et coefficientibus A, B, C etc. ita aſſumtis, vt ſit

$$A = f \qquad 2B = fA - g$$
$$3C = fB - (g-1)A \qquad 4D = fC - (g-2)B$$
$$5E = fD - (g-3)C \qquad 6F = fE - (g-4)D$$

etc.

ſumma illarum formularum praebebit:

$$-2.\,2^{m+n}\sin.\Phi^m\cos.\Phi^n = u^g + v^g + A\,(u^{g-2} + v^{g-2}) + B(u^{g-4} + v^{g-4}) + \text{etc.}$$

quae progreſſio vt ante ad coſinus ſimplices angulorum multiplorum ipſius $\Phi$ reducitur, ita vt ſit:

$$2^{m+n}\sin.\Phi^m\cos.\Phi^n = -\cos.g\Phi - A\cos.(g-2)\Phi - B\cos.(g-4)\Phi - C\cos.(g-6)\Phi - \text{etc.}$$

Q. E. F.

dixi, proueniant, ſi pro *m*, vel *n*, numerus negatiuus integer accipiatur, alterum numerum oportere eſſe affirmatiuum integrum illo non maiorem.

### PROBLEMA VII.

32. Si fuerit $S = A + B\,\text{coſ}.2\Phi + C\,\text{coſ}.4\Phi + D\,\text{coſ}.6\Phi + \text{etc.}$ inuenire ſeriem ipſi $\frac{S\,\text{ſin}.\Phi}{\text{coſ}.\Phi}$ aequalem.

### SOLVTIO.

Ponatur $\frac{S\,\text{ſin}.\Phi}{\text{coſ}.\Phi} = \beta\,\text{ſin}.2\Phi + \gamma\,\text{ſin}.4\Phi + \delta\,\text{ſin}.6\Phi + \varepsilon\,\text{ſin}.8\Phi + \text{etc.}$ eritque per $2\,\text{coſ}.\Phi$ multiplicando:

$$\begin{array}{llllll} 2S\,\text{ſin}.\Phi = \beta\,\text{ſin}.\Phi & + \beta\,\text{ſin}.3\Phi & + \gamma\,\text{ſin}.5\Phi & + \delta\,\text{ſin}.7\Phi & \text{etc.} \\ & + \gamma & + \delta & + \varepsilon & \end{array}$$

Quodſi autem ipſa ſeries propoſita per $2\,\text{ſin}.\Phi$ multiplicetur prodibit:

$$\begin{array}{lllll} 2S\,\text{ſin}.\Phi = 2A\,\text{ſin}.\Phi & + B\,\text{ſin}.3\Phi & + C\,\text{ſin}.5\Phi & + D\,\text{ſin}.7\Phi & \\ -B & -C & -D & -E & \text{etc.} \end{array}$$

Similibus ergo terminis inter ſe aequandis obtinebitur

$$\begin{array}{l} \beta = 2A - B \\ \gamma = B - C - \beta = -C + 2B - 2A \\ \delta = C - D - \gamma = -D + 2C - 2B + 2A \\ \varepsilon = D - E - \delta = -E + 2D - 2C + 2B - 2A \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

vnde valores coefficientium $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. facile definiuntur. Q. E. F.

### COROLL. 1.

33. Si ſeries S finito terminorum numero conſtet; altera ſeries $S\,\text{tang}.\Phi$ vel in infinitum excurret, vel

Verum ex lemmate eſt $\frac{u^{\nu}-v^{\nu}}{2\sqrt{-1}}=$ ſin. $\nu\Phi$, vnde oritur

$$2^{m+n}\text{ſin}.\Phi^{m}\text{coſ}.\Phi^{n}=\text{ſin}.g\Phi+A\,\text{ſin}.(g-2)\Phi+B\,\text{ſin}.(g-4)\Phi$$
$$+C\,\text{ſin}.(g-6)\Phi+\text{etc.}$$

Q. E. F.

## PROBLEMA VI.

18. Si exponens $m$ ſit numerus impar formae $4\alpha-1$, reſoluere hoc productum ſin. $\Phi^{m}$ coſ. $\Phi^{n}$ in ſinus coſinusue ſimplices.

## SOLVTIO.

Poſito denuo coſ. $\Phi+\sqrt{-1}$. ſin. $\Phi=u$ et coſ. $\Phi-\sqrt{-1}$. ſin. $\Phi=v$, vt ſit

$$\text{ſin}.\Phi^{m}\text{coſ}.\Phi^{n}=\frac{(u-v)^{m}}{2^{m}(\sqrt{-1})^{m}}\cdot\frac{(u+v)^{n}}{2^{n}}$$

ob $m$ numerum formae $4\alpha-1$ erit $(\sqrt{-1})^{m}=-\sqrt{-1}$, ideoque

$$2^{m+n}\text{ſin}.\Phi^{m}\text{coſ}.\Phi^{n}=-\frac{(u-v)^{m}(u+v)^{n}}{\sqrt{-1}}$$

At ob $m$ numerum imparem erit $(u-v)^{m}=-(v-u)^{m}$; ergo

$$2^{m+n}\text{ſin}.\Phi^{m}\text{coſ}.\Phi^{n}=+\frac{(v-u)^{m}(v+u)^{n}}{\sqrt{-1}}$$

quarum expreſſionum ſemiſumma eſt:

$$2^{m+n}\text{ſin}.\Phi^{m}\text{coſ}.^{n}=-\frac{(u-v)^{m}(u+v)^{n}+(v-u)^{m}(v+u)^{n}}{2\sqrt{-1}}$$

Si iam ponatur $n-m=f$, $m+n=g$, coefficientesque A, B, C etc. per ſequentes formulas determinentur

$$A = f \qquad 2B = fA - g$$
$$3C = fB - (g-1)A \qquad 4D = fC - (g-2)B$$
$$5E = fD - (g-3)C \qquad 6F = fE - (g-4)D$$
etc.

reperietur:

$$2^{m+n}\,\text{ſin.}\,\Phi^m \text{coſ.}\,\Phi^n = \frac{-(u^g - v^g)}{2\sqrt{-1}} - \frac{A(u^{g-2} - v^{g-2})}{2\sqrt{-1}} - \frac{B(u^{g-4} - v^{g-4})}{2\sqrt{-1}} - \text{etc.}$$

atque ob $\frac{u^\nu - v^\nu}{2\sqrt{-1}} = \text{ſin.}\,\nu\Phi$ obtinebitur tandem

$$2^{m+n}\text{ſin.}\,\Phi^m \text{coſ.}\,\Phi^n = -\,\text{ſin.}\,g\Phi - A\,\text{ſin.}\,(g-2)\Phi - B\,\text{ſin.}\,(g-4)\Phi$$
$$-\,C\,\text{ſin.}\,(g-6)\,\Phi - \text{etc.}$$

Q. E. F.

## COROLL. 1.

19. Productum ergo ſin. $\Phi^m$ coſ. $\Phi^n$ in coſinus ſimplices reſoluitur, ſi exponens $m$ fuerit numerus par: in ſinus autem ſimplices, ſi exponens $m$ fuerit numerus impar. Atque ſi exponens $m$ ſit vel $4\alpha$, vel $4\alpha + 1$, ſinguli termini erunt poſitiui, ſin autem $m$ ſit vel $4\alpha + 2$ vel $4\alpha - 1$, ſeu $4\alpha + 3$, termini ſigno negatiuo ſunt affecti.

## COROLL. 2.

20. His regulis tam ratione ſignorum, quam vtrum ſinus, an coſinus, accipi debeant, obſeruatis, reſolutio horum quaternorum caſuum requirit eandem coefficientium A, B, C etc. determinationem, quae ita ſe habet, vt poſito $n - m = f$ et $m + n = g$ eſſe debeat:

A = f

$$A = f$$
$$2B = fA - g$$
$$3C = fB - (g-1)A$$
$$4D = fC - (g-2)B$$
$$5E = fD - (g-3)C$$
$$6F = fE - (g-4)D$$
etc.

## COROLL. 3.

21. Vel hos coefficientes ita definiri oportet, vt ſit $(1-z)^m(1+z)^n = 1 + Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + \text{etc.}$ ex qua reſolutione hi coefficientes ſaepe facilius eruentur.

## COROLL. 4

22. Quoniam hi coefficientes in genere in fractiones abeunt, ſi hoc incommodum vitare velimus, ſtatim ponatur

$$(1-z)^m(1+z)^n = 1 + \frac{\alpha}{1}z + \frac{\beta}{1\cdot 2}z^2 + \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \frac{\delta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}z^4 + \text{etc.}$$

vt ſit

$$A = \frac{\alpha}{1}; \quad B = \frac{\beta}{1\cdot 2}; \quad C = \frac{\gamma}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$D = \frac{\delta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}; \; E = \frac{\varepsilon}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}; \; E = \frac{\zeta}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

tum autem erit:

$$\alpha = f$$
$$\beta = f\alpha - g$$
$$\gamma = f\beta - 2(g-1)\alpha$$
$$\delta = f\gamma - 3(g-2)\beta$$
$$\varepsilon = f\delta - 4(g-3)\gamma$$
$$\zeta = f\varepsilon - 5(g-4)\delta$$
etc.

COROL.

vbi iterum coefficiens $\alpha$ non determinatur, ſed arbitrio noſtro relinquitur. Q. E. I.

### COROLL. 1.

42. Si omnes coefficientes A, B, C, etc. euaneſcant, vt ſit $S=0$, fiet $\beta=-\alpha$; $\gamma=+\alpha$; $\delta=-\alpha$; $\varepsilon=+\alpha$; etc. ideoque erit

$$0=\alpha \text{ſin.}\Phi-\alpha \text{ſin.}3\Phi+\alpha \text{ſin.}5\Phi-\alpha \text{ſin.}7\Phi+\alpha \text{ſin.}9\Phi-\text{etc.}$$

ſeu $\text{ſin.}\Phi-\text{ſin.}3\Phi+\text{ſin.}5\Phi-\text{ſin.}7\Phi+\text{ſin.}9\Phi-\text{etc.}=0$

Supra autem inuenimus (34) eſſe

$$\text{coſ.}2\Phi-\text{coſ.}4\Phi+\text{coſ.}6\Phi-\text{coſ.}8\Phi+\text{coſ.}10\Phi-\text{etc.}=\tfrac{1}{2}$$

### COROLL. 2.

43. Si ergo ſeries propoſita S finito terminorum numero conſtet, pro $\alpha$ eiusmodi valor accipi poteſt, vt etiam ſerie S tang. $\Phi$ finito terminorum numero conſtet. Capi ſcilicet debet:

$$\alpha=A-2B+2C-2D+2E-\text{etc.}$$

### PROBLEMA X.

44. Si propoſita ſit haec ſeries

$$S=A\text{ſin.}\Phi+B\text{ſin.}3\Phi+C\text{ſin.}5\Phi+D\text{ſin.}7\Phi+E\text{ſin.}9\Phi+\text{etc.}$$

inuenire ſeriem, quae exprimat valorem formulae $\frac{S\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}$

### SOLVTIO.

Ponatur ſeries quaeſita:

$$\frac{S\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}=\alpha\text{coſ.}\Phi+\beta\text{coſ.}3\Phi+\gamma\text{coſ.}5\Phi+\delta\text{coſ.}7\Phi+\varepsilon\text{coſ.}9\Phi+\text{etc.}$$

quae per $2\,\text{coſ.}\Phi$ multiplicata dat:

2 S

$$2S\,\text{ſin.}\Phi = \alpha + \alpha\,\text{coſ.}2\Phi + \beta\,\text{coſ.}4\Phi + \gamma\,\text{coſ.}6\Phi + \delta\,\text{coſ.}8\Phi + \varepsilon\,\text{coſ.}10\Phi \text{ etc.}$$
$$\quad\quad\quad +\beta \quad\quad +\gamma \quad\quad +\delta \quad\quad +\varepsilon \quad\quad +\zeta$$

Si autem ipſa ſeries propoſita per 2 ſin. $\Phi$ multiplicetur habebitur.

$$2S\,\text{ſin}\,\Phi = A - A\,\text{coſ.}2\Phi - B\,\text{coſ.}4\Phi - C\,\text{coſ.}6\Phi - D\,\text{coſ.}8\Phi - E\,\text{coſ.}10\Phi \text{ etc.}$$
$$\quad\quad\quad +B \quad\quad +C \quad\quad +D \quad\quad +E \quad\quad +F$$

vnde ſequentes eliciuntur coefficientium quaeſitorum determinationes.

$\alpha = A$

$\beta = B - A - \alpha = B - 2A$

$\gamma = C - B - \beta = C - 2B + 2A$

$\delta = D - C - \gamma = D - 2C + 2B - 2A$

$\varepsilon = E - D - \delta = E - 2D + 2C - 2B + 2A$

$\zeta = F - E - \varepsilon = F - 2E + 2D - 2C + 2B - 2A$

etc.

Hoc igitur caſu omnes coefficientes quaeſiti determinantur, nulluſque eorum arbitrio noſtro relinquitur. Q. E. I.

### COROLL. 1.

45. Si ſeries propoſita S finito terminorum numerorum conſtet, fieri poteſt, vt ſeries $\frac{S\,\text{ſin.}\Phi}{\text{coſ.}\Phi}$ vel quoque ſit finita, vel in infinitum excurrat. Prius eueniet, ſi coefficientes A, B, C, etc. ita fuerint comparati, vt ſit

$$A - B + C - D + F - \text{etc.} = 0$$

### COROLL. 2

46. Series autem propoſita S abit in A-B+C-D+etc. ſi angulus $\Phi$ ſtatuatur rectus; quare ſi valor ſeriei S

 euaneſcat,

euaneſcat poſito $\Phi = 90°$, tum ſeries $\frac{S \text{ſin.}\Phi}{\text{coſ.}\Phi}$ finito conſtabit terminorum numero, ſiquidem ſeries S fuerit talis:

## SCHOLION. 1.

47. Quatuor haec problemata methodum ſuppeditant, formulas ſupra (26) exhibitas facilius inueniendi: atque haec problemata ita adornaui, vt has formulas ordine retrogrado ſcriptas praeberent. Cum enim valor expreſſionis $2^{n-1}$ coſ. $\Phi^n$ iam ſupra per progreſſionem coſinuum ſimplicium ſit erutus, inde horum problematum ope iſtae formulae:

$$2^{n-1}\text{ſin.}\Phi\text{coſ.}\Phi^{n-1};\ 2^{n-1}\text{ſin.}\Phi^2\text{coſ.}\Phi^{n-2};\ 2^{n-1}\text{ſin.}\Phi^3\text{coſ.}\Phi^{n-3};\ \text{etc.}$$

in ſimiles progreſſiones conuerti poterunt: ac ſi quidem exponens $n$ fuerit numerus par, negotium per bina problemata priora conficietur, ſi autem $n$ ſit numerus impar, per bina poſteriora. Quoniam has formulas iam ad poteſtatem ſeptimam exhibuimus; ſumamus poteſtatem octauam ex §. 9.

$$128\,\text{coſ.}\Phi^8 = 35 + 56\,\text{coſ.}2\Phi + 28\,\text{coſ.}4\Phi + 8\,\text{coſ.}6\Phi + \text{coſ.}8\Phi$$

et in problemate VII. ſit $S = 128\,\text{coſ.}\Phi^8$, erit

$$A = 35;\ B = 56,\ C = 28,\ D = 8,\ E = 1$$

vnde eruitur:

$$\beta = 70 - 56 = 14$$
$$\gamma = 56 - 28 - 14 = 14$$
$$\delta = 28 - 8 - 14 = 6$$
$$\varepsilon = 8 - 1 - 6 = 1$$

ſicque erit:

$$128\,\text{ſin.}\Phi\text{coſ.}\Phi^7 = 14\,\text{ſin.}2\Phi + 14\,\text{ſin.}4\Phi + 6\,\text{ſin.}6\Phi + \text{ſin.}8\Phi$$

Sit

Sit nunc in problemate VIII. $S = 128\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^7$ ideoque

$$B = 14;\ C = 14;\ D = 6;\ E = 1;$$

et capiatur $\alpha = B - C + D - E = 5$ (§. 40.) erit

$$\begin{aligned}
\beta &= 14 - 10 &&= 4\\
\gamma &= 14 - 14 - 4 &&= -4\\
\delta &= 6 - 14 + 4 &&= -4\\
\varepsilon &= 1 + 6 + 4 &&= -1
\end{aligned}$$

et hanc ob rem:

$$128\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi^6 = 5 + 4\,\text{coſ.}\,2\Phi - 4\,\text{coſ.}\,4\Phi - 4\,\text{coſ.}\,6\Phi - \text{coſ}\,8\Phi$$

ſit denuo in problemate VII. $S = 128\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi^6$ et

$$A = 5;\ B = 4;\ C = -4;\ D = -4;\ E = -1$$

reperieturque:

$$\begin{aligned}
\beta &= 10 - 4 &&= 6\\
\gamma &= 4 + 4 - 6 &&= 2\\
\delta &= -4 + 4 - 2 &&= -2\\
\varepsilon &= -4 + 1 + 2 &&= -1
\end{aligned}$$

Ergo

$$128\,\text{ſin.}\,\Phi^3\,\text{coſ.}\,\Phi^5 = 6\,\text{ſin.}\,2\Phi + 2\,\text{ſin.}\,4\Phi - 2\,\text{ſin.}\,6\Phi - \text{ſin.}\,8\Phi$$

Nunc in problemate VIII. ſit $S = 128\,\text{ſin.}\,\Phi^3\,\text{coſ.}\,\Phi^5$ atque

$$B = 6;\ C = 2;\ D = -2;\ E = -1$$

et capiatur $\alpha = B - C + D - E = 3$

$$\begin{aligned}
\beta &= 6 - 6 &&= 0\\
\gamma &= 2 - 6 - 0 &&= -4\\
\delta &= -2 - 2 + 4 &&= 0\\
\varepsilon &= -1 + 2 - 0 &&= 1 :\ \text{ergo}
\end{aligned}$$

$$128\,\text{ſin.}\,\Phi^4\,\text{coſ.}\,\Phi^4 = 3 \ast - 4\,\text{coſ.}\,4\Phi \ast + 1\,\text{coſ.}\,8\Phi.$$

Sit nunc in problemate VII. $S = 128\,\text{ſin.}\,\Phi^4\,\text{coſ.}\,\Phi^4$ et

$$A = 3;\ B = 0;\ C = -4;\ D = 0;\ E = 1,$$

ſumaturque

$$\begin{array}{llll} \beta = & 6-0 & = & 6 \\ \gamma = & 0+4-6 & = & -2 \\ \delta = & -4-0+2 & = & -2 \\ \varepsilon = & 0-1+2 & = & +1 \end{array}$$ ergo

$$128\,\text{ſin.}\,\Phi^5\,\text{coſ.}\,\Phi^5 = 6\,\text{ſin.}\,2\Phi\ \ 2\,\text{ſin.}\,4\Phi - 2\,\text{ſin.}\,6\Phi + \text{ſin.}\,8\Phi$$

Sicque vlterius progrediendo obtinebimus in ſupplementum §. 26. has formulas inuertendo.

$$\begin{array}{llllll}
128\,\text{coſ.}\,\Phi^8 & = +\text{coſ.}\,8\Phi & + 8\,\text{coſ.}\,6\Phi & + 28\,\text{coſ.}\,4\Phi & + 56\,\text{coſ.}\,2\Phi & + 35 \\
128\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^7 & = +\text{ſin.}\,8\Phi & + 6\,\text{ſin.}\,6\Phi & + 14\,\text{ſin.}\,4\Phi & + 14\,\text{ſin.}\,2\Phi & \\
128\,\text{ſin.}\,\Phi^2\,\text{coſ.}\,\Phi^6 & = -\text{coſ.}\,8\Phi & - 4\,\text{coſ.}\,6\Phi & - 4\,\text{coſ.}\,4\Phi & + 4\,\text{coſ.}\,2\Phi & + 5 \\
128\,\text{ſin.}\,\Phi^3\,\text{coſ.}\,\Phi^5 & = -\text{ſin.}\,8\Phi & - 2\,\text{ſin.}\,6\Phi & + 2\,\text{ſin.}\,4\Phi & + 6\,\text{ſin.}\,2\Phi & \\
128\,\text{ſin.}\,\Phi^4\,\text{coſ.}\,\Phi^4 & = +\text{coſ.}\,8\Phi & \ast & - 4\,\text{coſ.}\,4\Phi & \ast & + 3 \\
128\,\text{ſin.}\,\Phi^5\,\text{coſ.}\,\Phi^3 & = +\text{ſin.}\,8\Phi & - 2\,\text{ſin.}\,6\Phi & - 2\,\text{ſin.}\,4\Phi & + 6\,\text{ſin.}\,2\Phi & \\
128\,\text{ſin.}\,\Phi^6\,\text{coſ.}\,\Phi^2 & = -\text{coſ.}\,8\Phi & + 4\,\text{coſ.}\,6\Phi & - 4\,\text{coſ.}\,4\Phi & - 4\,\text{coſ.}\,2\Phi & + 5 \\
128\,\text{ſin.}\,\Phi^7\,\text{coſ.}\,\Phi & = -\text{ſin.}\,8\Phi & + 6\,\text{ſin.}\,6\Phi & - 14\,\text{ſin.}\,4\Phi & + 14\,\text{ſin.}\,2\Phi & \\
128\,\text{ſin.}\,\Phi^8 & = +\text{coſ.}\,8\Phi & - 8\,\text{coſ.}\,6\Phi & + 28\,\text{coſ.}\,4\Phi & - 36\,\text{coſ.}\,2\Phi & + 35
\end{array}$$

## SCHOLION. 2.

48. Simili modo, pro vſu probl. IX. et X. oſtendendo, ſit

$$256\,\text{coſ.}\,\Phi^9 = 126\,\text{coſ.}\,\Phi + 84\,\text{coſ.}\,3\Phi + 36\,\text{coſ.}\,5\Phi + 9\,\text{coſ.}\,7\Phi + \text{coſ.}\,9\Phi$$

Sitque in probl. IX. $S = 256\,\text{coſ.}\,\Phi^9$, atque

$A =$

$A = 126$; $B = 84$, $C = 36$, $D = 9$; $E = 1$

capiatur $\alpha = A - 2B + 2C - 2D + 2E = 14$

$$\beta = 126 - 84 - 14 = 28$$
$$\gamma = 84 - 36 - 28 = 20$$
$$\delta = 36 - 9 - 20 = 7$$
$$\epsilon = 9 - 1 - 7 = 1$$ ergo

256 ſin. Φ coſ. $\Phi^8$ = 14 ſin. Φ + 28 ſin. 3 Φ + 20 ſin. 5 Φ
+ 7 ſin. 7 Φ + ſin. 9 Φ

In probl. X. ſit S = 256 ſin. Φ coſ. $\Phi^8$ et

$A = 14$; $B = 28$, $C = 20$, $D = 7$; $E = 1$

$$\alpha = 14$$
$$\beta = 28 - 14 - 14 = 0$$
$$\gamma = 20 - 28 - 0 = -8$$
$$\delta = 7 - 20 + 8 = -5$$
$$\epsilon = 1 - 7 + 5 = -1$$ ergo

256 ſin. $\Phi^2$ coſ. $\Phi^7$ = 14 coſ. Φ * − 8 coſ. 5 Φ − 5 coſ. 7 Φ − coſ. 9 Φ

In probl. IX. ſit. S = 256 ſin, $\Phi^2$ coſ, $\Phi^7$ et

$A = 14$; $B = 0$; $C = -8$, $D = -5$, $E = -1$

capiatur $\alpha = 14 - 0 - 16 + 10 - 2 = +6$

$$\beta = 14 - 0 - 6 = +8$$
$$\gamma = 0 + 8 - 8 = 0$$
$$\delta = -8 + 5 - 0 = -3$$
$$\epsilon = -5 + 1 + 3 = -1$$ ergo

256 ſin. $\Phi^3$ coſ. $\Phi^6$ = 6 ſin. Φ + 8 ſin. 3 Φ * − 3 ſin. 7 Φ − ſin. 9 Φ

In

In probl. X. ſit $S = 256$ ſin. $\Phi^3$ coſ. $\Phi^6$, et

$A=6$; $B=8$; $C=0$; $D=-3$; $E=-1$

fiet $\alpha = \quad 6$

$\beta = 8-6-6 = -4$

$\gamma = 0-8+4 = -4$

$\delta = -3-0+4 = +1$

$\varepsilon = -1+3-1 = -1$ ergo

$$256\,\text{ſin.}\Phi^4\,\text{coſ.}\Phi^5 = 5\,\text{coſ.}\Phi \;\; 4\,\text{coſ.}3\Phi - 4\,\text{coſ.}5\Phi + \text{coſ.}7\Phi + \text{coſ.}9\Phi$$

Vnde in ſupplementum §. 26. habebitur

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $256\,\text{coſ.}\,\Phi^9$ | $=$ | $+\,\text{coſ.}9\Phi$ | $+\,9\,\text{coſ.}7\Phi$ | $+\,36\,\text{coſ.}5\Phi$ | $+\,84\,\text{coſ.}3\Phi$ | $+\,126\,\text{coſ.}\Phi$ |
| $256\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi^8$ | $=$ | $+\,\text{ſin.}9\Phi$ | $+\,7\,\text{ſin.}7\Phi$ | $+\,20\,\text{ſin.}5\Phi$ | $+\,28\,\text{ſin.}3\Phi$ | $+\,14\,\text{ſin.}\Phi$ |
| $256\,\text{ſin.}\Phi^2\,\text{coſ.}\Phi^7$ | $=$ | $-\,\text{coſ.}9\Phi$ | $-\,5\,\text{coſ.}7\Phi$ | $-\,8\,\text{coſ.}5\Phi$ | * | $+\,14\,\text{coſ.}\Phi$ |
| $256\,\text{ſin.}\Phi^3\,\text{coſ.}\Phi^6$ | $=$ | $-\,\text{ſin.}9\Phi$ | $+\,\text{ſin.}7\Phi$ | * | $+\,8\,\text{ſin.}3\Phi$ | $+\,6\,\text{ſin.}\Phi$ |
| $256\,\text{ſin.}\Phi^4\,\text{coſ.}\Phi^5$ | $=$ | $+\,\text{coſ.}9\Phi$ | $-\,\text{coſ.}7\Phi$ | $-\,4\,\text{coſ.}5\Phi$ | $-\,4\,\text{coſ.}3\Phi$ | $+\,6\,\text{coſ.}\Phi$ |
| $256\,\text{ſin.}\Phi^5\,\text{coſ.}\Phi^4$ | $=$ | $+\,\text{ſin.}9\Phi$ | $-\,\text{ſin.}7\Phi$ | $-\,4\,\text{ſin.}5\Phi$ | $+\,4\,\text{ſin.}3\Phi$ | $+\,6\,\text{ſin.}\Phi$ |
| $256\,\text{ſin.}\Phi^6\,\text{coſ.}\Phi_3$ | $=$ | $-\,\text{coſ.}9\Phi$ | $+\,3\,\text{coſ.}7\Phi$ | * | $-\,8\,\text{coſ.}3\Phi$ | $+\,6\,\text{coſ.}\Phi$ |
| $256\,\text{ſin.}\Phi_7\,\text{coſ.}\Phi^2$ | $=$ | $-\,\text{ſin.}9\Phi$ | $+\,5\,\text{ſin.}7\Phi$ | $-\,8\,\text{ſin.}5\Phi$ | * | $+\,14\,\text{ſin.}\Phi$ |
| $256\,\text{ſin.}\Phi_8\,\text{coſ.}\Phi$ | $=$ | $+\,\text{coſ.}9\Phi$ | $-\,7\,\text{coſ.}7\Phi$ | $+\,20\,\text{coſ.}5\Phi$ | $-\,28\,\text{coſ.}3\Phi$ | $+\,14\,\text{coſ.}\Phi$ |
| $256\,\text{ſin.}\,\Phi^9$ | $=$ | $+\,\text{ſin.}9\Phi$ | $-\,9\,\text{ſin.}7\Phi$ | $+\,36\,\text{ſin.}5\Phi$ | $-\,84\,\text{ſin.}3\Phi$ | $+\,126\,\text{ſin.}\Phi$ |

Hoc igitur modo iſtas formulas, quo vsque libuerit, continuare licet.

## THEOREMA.

49. Si aſſignari queat ſumma huius ſeriei

$$Az^m + Bz^{m+n} + Cz^{m+2n} + Dz^{m+3n} Ez^{m+4n} + \text{etc.} = Z$$

ſemper quoque exhiberi poterunt ſummae harum ſerierum:

$$A\,\text{coſ.}\,m\Phi + B\,\text{coſ.}(m+n)\Phi + C\,\text{coſ.}(m+2n)\Phi + D\,\text{coſ.}(m+3n)\Phi + \text{etc.}$$

$$A\,\text{ſin.}\,m\Phi + B\,\text{ſin.}(m+n)\Phi + C\,\text{ſin.}(m+2n)\Phi + D\,\text{ſin.}(m+3n)\Phi + \text{etc.}$$

DEMON-

## DEMONSTRATIO.

Ponantur ſummae harum ſerierum:

$$A\cos.m\Phi + B\cos.(m+n)\Phi + C\cos.(m+2n)\Phi + D\cos.(m+3n)\Phi + \text{etc.} = S$$

$$A\sin.m\Phi + B\sin.(m+n)\Phi + C\sin.(m+2n)\Phi + D\sin.(m+3n)\Phi + \text{etc.} = T$$

ſitque vt ſupra

$$\cos.\Phi + \sqrt{-1}.\sin.\Phi = u \text{ et } \cos.\Phi - \sqrt{-1}.\sin.\Phi = v$$

erit $\cos.\nu\Phi + \sqrt{-1}.\sin.\nu\Phi = u^\nu$ et $\cos.\nu\Phi - \sqrt{-1}.\sin.\nu\Phi = v^\nu$

Hinc ergo erit

$$S + T\sqrt{-1} = Au^m + Bu^{m+n} + Cu^{m+2n} + Du^{m+3n} + \text{etc.} = U$$

$$S - T\sqrt{-1} = Av^m + Bv^{m+n} + Cv^{m+2n} + Dv^{m+3n} + \text{etc.} = V$$

Summae ſcilicet harum ſerierum U et V per hypotheſin dantur, cum U et V tales ſint functiones ipſarum $u$ et $v$, qualis functio Z eſt ipſius $z$. Hinc itaque elicitur $S = \frac{U+V}{2}$ et $T = \frac{U-V}{2\sqrt{-1}}$; ideoque ſummae propoſitarum ſerierum S et T innoteſcunt. Q. E. D.

### COROLL. 1.

30. Cum ſit $z^m + az^{m+n} + a^2z^{m+2n} + a^3z^{m+3n} + \text{etc.} = \frac{z^m}{1-az^n}$

erit $U = \frac{u^m}{1-au^n}$ et $V = \frac{v^m}{1-av^n}$;

Hinc $U + V = \frac{u^m + v^m - a(u^{m-n} + v^{m-n})u^n v^n}{1 - a(u^n + v^n) + aau^n v^n}$

$U - V = \frac{u^m - v^m - a(u^{m-n} - v^{m-n})u^n v^n}{1 - a(v^n + v^n) + aau^n v^n}$

At eſt $uv = 1$, $u^\nu + v^\nu = 2\,\text{coſ}.\,\nu\Phi$; $u^\nu - v^\nu = 2\sqrt{-1}\,.\,\text{ſin}.\,\nu\Phi$, vnde fit

$\frac{U+V}{2} = \frac{\text{coſ}.\,m\Phi - a\,\text{coſ}.(m-n)\Phi}{1 + aa - 2a\,\text{coſ}.\,n\Phi} = S$ et

$\frac{U-V}{2\sqrt{-1}} = \frac{\text{ſin}.\,m\Phi - a\,\text{ſin}.(m-n)\Phi}{1 + aa - 2a\,\text{coſ}.\,n\Phi} = T$

Ex quo ſequentes habentur ſummationes:

$\text{coſ}.\,m\Phi + a\,\text{coſ}.(m+n)\Phi + a^2\text{coſ}.(m+2n)\Phi + a^3\text{coſ}.(m+3n)\Phi + \text{etc.} = \frac{\text{coſ}\,m\Phi - a\,\text{coſ}.(m-n)\Phi}{1 + aa - 2a\,\text{coſ}.\,n\Phi}$

$\text{ſin}.\,m\Phi + a\,\text{ſin}.(m+n)\Phi + a^2\text{ſin}.(m+2n)\Phi + a^3\text{ſin}\,(m+3n)\Phi + \text{etc.} = \frac{\text{ſin}.\,m\Phi - a\,\text{ſin}.(m-n)\Phi}{1 + aa - 2a\,\text{coſ}.\,n\Phi}$

## COROLL. 2.

51. Sit $m = 1$ et $n = 1$ erit

$\text{coſ}.\Phi + a\,\text{coſ}.2\Phi + a^2\text{coſ}.3\Phi + a^3\text{coſ}.4\Phi + \text{etc.} = \frac{\text{coſ}.\,\Phi - a}{1 + aa - 2a\,\text{coſ}.\Phi}$

$\text{ſin}\,\Phi + a\,\text{ſin}.2\Phi + a^2\text{ſin}.3\Phi + a^3\text{ſin}.4\Phi + \text{etc.} = \frac{\text{ſin}.\,\Phi}{1 + aa - 2a\,\text{coſ}.\Phi}$

Si inſuper ſit $a = 1$ erit

$\text{coſ}.\Phi + \text{coſ}.2\Phi + \text{coſ}.3\Phi + \text{coſ}.4\Phi + \text{etc.} = \frac{\text{coſ}.\Phi - 1}{2 - 2\,\text{coſ}.\Phi} = -\frac{1}{2}$

$\text{ſin}.\Phi + \text{ſin}.2\Phi + \text{ſin}.3\Phi + \text{ſin}.4\Phi + \text{etc.} = \frac{\text{ſin}.\,\Phi}{2 - 2\,\text{coſ}.\Phi} = \frac{1}{2\,\text{tang}.\,\frac{1}{2}\Phi}$

Sin autem ſit $a = -1$ erit

$\text{coſ}.\,\Phi - \text{coſ}.\,2\,\Phi + \text{coſ}.\,3\,\Phi - \text{coſ}.\,4\,\Phi + \text{etc.}\ \frac{\text{coſ}.\,\Phi + 1}{2 + 2\,\text{coſ}.\Phi} = \frac{1}{2}$

$\text{ſin}.\Phi - \text{ſin}.2\,\Phi + \text{ſin}.3\Phi - \text{ſin}.4\Phi + \text{etc.} = \frac{\text{ſin}.\,\Phi}{2 + 2\,\text{coſ}.\Phi} = \frac{1}{2}\,\text{tang}.\frac{1}{2}\Phi$

COROL.

## COROLL. 3.

52. Sit $m=1$, et $n=2$, erit

$$\text{coſ.}\Phi+a\,\text{coſ.}3\Phi+a^2\text{coſ.}5\Phi+a^3\text{coſ.}7\Phi+\text{etc.}=\frac{\text{coſ.}\Phi-a\,\text{coſ.}\Phi}{1+aa-2a\,\text{coſ.}2\Phi}$$

$$\text{ſin.}\Phi+a\,\text{ſin.}3\Phi+a^2\text{ſin.}5\Phi+a^3\text{ſin.}7\Phi+\text{etc.}=\frac{\text{ſin.}\Phi+a\,\text{ſin.}\Phi}{1+aa-2a\,\text{coſ.}2\Phi}$$

Quodſi ergo ſit $a=1$, erit

$$\text{coſ.}\Phi+\text{coſ.}3\Phi+\text{coſ.}5\Phi+\text{coſ.}7\Phi+\text{etc.}=0$$

$$\text{ſin.}\Phi+\text{ſin.}3\Phi+\text{ſin.}5\Phi+\text{ſin.}7\Phi+\text{etc.}=\frac{\text{ſin.}\Phi}{1-\text{coſ.}2\Phi}=\frac{1}{2\,\text{ſin.}\Phi}$$

Sin autem ſit $a=-1$, erit

$$\text{coſ.}\Phi-\text{coſ.}3\Phi+\text{coſ.}5\Phi-\text{coſ.}7\Phi+\text{etc.}=\frac{2\,\text{coſ.}\Phi}{2+2\,\text{coſ.}2\Phi}=\frac{1}{2\,\text{coſ.}\Phi}$$

$$\text{ſin.}\Phi-\text{ſin.}3\Phi+\text{ſin.}5\Phi-\text{ſin.}7\Phi+\text{etc.}=0.$$

## SCHOLION.

53. Ope huius theorematis ergo, cuius vſus latiſſime patet, innumerabiles exhiberi poſſunt ſeries ſecundum, vel ſinus, vel coſinus, multiplorum cuiuspiam anguli progredientes, quarum ſumma conſtat. Caſum hic quidem tantum euolui, quo coefficientes A, B, C, D etc. in geometrica progreſſione progrediuntur, verum pari modo calculus ad alias ſeries accommodatur. Praeterea autem hic notaſſe ſufficiat, ex ſeriebus iam inuentis, innumerabiles alias, tam per differentiationem, quam integrationem, elici poſſe. Veluti cum ſit

$$\text{coſ.}\Phi-\text{coſ.}2\Phi+\text{coſ.}3\Phi-\text{coſ.}4\Phi+\text{coſ.}5\Phi-\text{etc.}=\frac{1}{2}$$

erit differentiando:

$$\text{ſin.}\Phi-2\,\text{ſin.}2\Phi+3\,\text{ſin.}3\Phi-4\,\text{ſin.}4\Phi+5\,\text{ſin.}5\Phi-\text{etc.}=0$$

denuoque differentiando

$\cos.\Phi - 4\cos.2\Phi + 9\cos.3\Phi - 16\cos.4\Phi + 25\cos.5\Phi - \text{etc.} = 0$
et ita porro.

Illa autem ſeries per $d\Phi$ multiplicata et integrata dat:
$\sin.\Phi - \frac{1}{2}\sin.2\Phi + \frac{1}{3}\sin.3\Phi - \frac{1}{4}\sin.4\Phi + \frac{1}{5}\sin.5\Phi - \text{etc.} = \frac{\Phi}{2}$
vbi additione conſtantis non eſt opus, cum poſito $\Phi = 0$ ſumma ſponte euaneſcat. Si haec per $-d\Phi$ multiplicata denuo integretur, prodibit

$$\cos.\Phi - \frac{1}{4}\cos.2\Phi + \frac{1}{9}\cos.3\Phi - \frac{1}{16}\cos.4\Phi + \text{etc.} = \alpha - \frac{\Phi\Phi}{4}$$

ideoque poſito $\Phi = 0$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.} = \alpha = \frac{\pi\pi}{12}$$ vt aliunde conſtat.

Quare ſi ſit $\Phi = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 103^{\circ}, 55^{I}, 22^{II}, 58^{III}, 27^{IV}$, ſumma iſtius ſeriei euaneſcit. Plurimas alias autem inſignes huiusmodi ſerierum affectiones, ne nimis ſim longus, hic praetermitto.

DE

DE

# SERIEBVS DIVERGENTIBVS.

*Auctore LEON. EVLERO.*

§. 1.

Cum ſeries conuergentes ita definiantur, vt conſtent terminis continuo decreſcentibus, qui tandem, ſi ſeries in infinitum proceſſerit penitus euaneſcant; facile intelligitur, quarum ſerierum termini infiniteſimi non in nihilum abeant, ſed vel finiti maneant, vel in infinitum excreſcant, eas, quia non ſunt conuergentes, ad claſſem ſerierum diuergentium referri oportere. Prout igitur termini ſeriei vltimi, ad quos progreſſione in infinitum continuata peruenitur, fuerint vel magnitudinis finitae, vel infinitae, duo habebuntur ſerierum diuergentium genera, quorum vtrumque porro in duas ſpecies ſubdiuiditur, prout vel omnes termini eodem ſint affecti ſigno, vel ſigna + et − alternatim ſe excipiant. Omnino ergo habebimus quatuor ſerierum diuergentium ſpecies, ex quibus maioris perſpicuitatis gratia aliquot exempla ſubiungam.

| | |
|---|---|
| I. . . . | $1+1+1+1+1+1+$ etc. |
| | $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+$ etc. |
| II. . . . | $1-1+1-1+1-1+$ etc. |
| | $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+$ etc. |
| III. . . . | $1+2+3+4+5+6+$ etc. |
| | $1+2+4+8+16+32+$ etc. |
| IV. . . . | $1-2+3-4+5-6+$ etc. |
| | $1-2+4-8+16-32+$ etc. |

§. 2. De ſummis huiusmodi ſerierum diuergentium magnus eſt diſſenſus inter Mathematicos, dum alii negant, alii affirmant, eas in vna ſumma comprehendi poſſe. Ac primo quidem perſpicuum eſt, ſerierum, quas ad ſpeciem primam retuli, ſummas reuera eſſe infinite magnas, cum terminis actu colligendis ad ſummam dato quouis numero maiorem perueniatur: vnde nullum quidem eſt dubium, quin harum ſerierum ſummae per huiusmodi expreſſiones $\frac{a}{0}$ exhiberi queant. Circa reliquas igitur ſpecies potiſſimum verſatur controuerſia inter Geometras; atque argumenta, quae vtrinque ad ſententiam tuendam afferuntur, tanta vi ad perſuadendum ſunt praedita, vt neutra pars adhuc alteri aſſenſum praebere cogi potuerit.

§. 3. Ex ſpecie ſecunda Leibnitius primus hanc contemplatus eſt ſeriem:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$$

cuius ſummam valere $= \frac{1}{2}$ ſtatuerat, his ſatis firmis rationibus innixus: Primum enim haec ſeries prodit, ſi fractio haec $\frac{1}{1+a}$ per diuiſionem continuam more ſolito in hanc ſeriem $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + \text{etc.}$ reſolvatur, et valor litterae $a$ vnitati aequalis ſumatur. Tum vero etiam ad hoc magis confirmandum, iisque, qui calculo non ſunt aſſueti, perſuadendum, ſequenti vſus eſt ratiocinio: Si ſeries alicubi terminetur, terminorumque numerus fuerit par, tum valor eius erit $= 0$, ſin autem terminorum numerus ſit impar, valor ſeriei erit $= 1$: quodſi ergo ſeries in infinitum progrediatur, numerusque terminorum, neque par, neque impar, cenſeri queat, ſummam neque $= 0$, neque $= 1$, eſſe poſſe concludit, ſed

medium

medium quendam valorem, ab vtroque aeque diuerſum, tenere debere, qui ſit $= \frac{1}{2}$.

§. 4. Contra haec argumenta ab aduerſariis obiici ſolet; primo fractionem $\frac{1}{1+a}$ non eſſe aequalem ſeriei infinitae:

$$1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - \text{etc.}$$

niſi $a$ ſit fractio vnitate minor. Si enim diuiſio vſpiam abrumpatur, et quoto ex reſiduo portio debita adiiciatur, fontem paralogiſmi fore manifeſtum; fieri namque

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots\ldots\ldots \pm a^n \mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$$

et quamuis numerus $n$ ſtatuatur infinitus, tamen fractionem adiectam $\mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$ omitti non licere, niſi re vera euaneſcat, quod iis tantum caſibus, quibus $a < 1$, vſu venit, ſeriesque euadit conuergens. Reliquis autem caſibus ſemper huius mantiſſae $\mp \frac{a^{n+1}}{1+a}$ rationem haberi oportere, et quamuis ſigno dubio $\mp$, prout $n$ fuerit numerus vel par, vel impar, ſit affecta, tamen ſi $n$ ſit infinitus, ideo negligi non poſſe, quod numerus infinitus neque ſit par, neque impar, nullaque propterea habeatur cauſa, vtrum ſignum potius ſit adhibendum? abſurdum enim eſſe putare, quemquam dari numerum integrum, ne infinitum quidem, qui neque par ſit, neque impar.

§. 5. Verum in hac obiectione ab illis, qui ſeriebus diuergentibus determinatas ſummas tribuunt, iure reprehendi ſolet, quod numerus infinitus tanquam numerus determinatus concipiatur, atque adeo vel par, vel impar

impar ſtatuatur, cum tamen ſit indeterminatus. Statim enim atque ſeries dicatur in infinitum progredi, huic ideae contrarium eſſe, ſi eiusdem ſeriei terminus quidam vltimus etſi infiniteſimus concipiatur: ideoque obiectionem ante memoratam de mantiſſa vltimo termino addenda, vel ſubtrahenda, ſponte euaneſcere. Cum igitur in ſerie infinita nunquam ad finem perueniatur, nunquam etiam ad eiusmodi locum peruenire, vbi neceſſe eſſet mantiſſam illam adiungere; adeoque hanc ipſam mantiſſam nonſolum negligi poſſe, ſed etiam debere, quod nuſquam ei locus relinquitur. Atque haec argumenta, quae ad ſummas ſerierum diuergentium vel aſſerendas, vel refellendas, afferuntur, quoque ad quartam ſpeciem ſpectant, quae nullis praeterea dubiis ipſi propriis vexari ſolet.

§. 6. Sed ii, qui contra ſummas ſerierum diuergentium diſputant, in ſpecie tertia firmiſſimum praeſidium inuenire arbitrantur. Quanquam enim harum ſerierum termini continuo creſcunt, ideoque terminis actu colligendis ad ſummam quouis aſſignabili numero maiores perueniri poteſt, quae eſt definitio infiniti; tamen patroni ſummarum in hac ſpecie eiusmodi ſeries admittere coguntur, quarum ſummae ſint finitae, atque adeo negatiuae, ſeu nihilo minores. Cum enim fractio $\frac{1}{1-a}$ per diuiſionem in ſeriem euoluta det: $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 +$ etc. deberet eſſe:

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \text{etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \text{etc.}$$

quod aduerſariis non immerito abſurdiſſimum videtur cum per additionem numerorum affirmatiuorum nunquam

nunquam ad ſummam negatiuam perueniri queat. Hincque eo magis neceſſitatem mantiſſae addendae ante memoratae vrgent, cum ea adiecta perſpicuum ſit, fore

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 \ldots\ldots\ldots + 2^n + \frac{2^{n+1}}{1-2}$$

etiamſi $n$ ſit numerus infinitus.

§. 7. Defenſores igitur ſummarum ſerierum diuergentium ad hoc inſigne paradoxon conciliandum, ſubtile magis, quam verum, diſcrimen inter quantitates negatiuas ſtatuunt; dum alias nihilo minores, alias vero infinito maiores, ſeu plusquam infinitas eſſe arguunt. Alium ſcilicet valorem ipſius $-1$ agnoſci debere, quando ex ſubtractione numeri maioris $a+1$, a minori $a$ oriri concipitur, alium vero, quando ſeriei illi $1+2+4+8+16+$ etc. aequalis reperitur, atque ex diuiſione numeri $+1$ per $-1$ naſcitur; illo quippe caſu eſſe numerum nihilo minorem, hoc vero infinito maiorem. Maioris confirmationis gratia afferunt hoc exemplum fractionum:

$$\frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{0},\ \frac{1}{-1},\ \frac{1}{-2},\ \frac{1}{-3},\ \text{etc.}$$

quae cum prioribus terminis creſcens perſpiciatur, etiam continuo creſcere ſit cenſenda; vnde concludunt fore $\frac{1}{-1} > \frac{1}{0}$ et $\frac{1}{-2} > \frac{1}{-1}$, ſicque porro: ideoque quatenus $\frac{1}{-1}$ per $-1$ et $\frac{1}{0}$ per infinitum $\infty$ exprimitur, eſſe $-1 > \infty$, multoque magis $\frac{1}{-2} > \infty$: quo pacto abſurditatem apparentem illam ſatis ingenioſe a ſe propellunt.

§. 8. Quamuis autem haec diſtinctio ingenioſe excogitata videatur, tamen aduerſariis parum ſatisfacit, atque adeo certitudini analyſeos vim afferre videtur. Si enim bini illi valores ipſius $-1$, quatenus eſt vel $= 1 - 2$,

vel $= \frac{1}{-1}$, inter ſe re vera diſcrepent, vt eos confundere non liceat, certitudo atque vſus regularum, quas in calculis ſequimur, penitus tolleretur, quod certe magis foret abſurdum, quam id, cuius gratia haec diſtinctio eſt excogitata; ſin autem ſit $1-2 = \frac{1}{-1}$, vti praecepta algebrae poſtulant, negotium minime conficitur, cum ex ipſa quantitas $-1$, quae ſeriei $1+2+4+8+$ etc. aequalis ſtatuitur, ſit nihilo minor, ideoque eadem difficultas permaneat. Interim tamen veritati conſentaneum videtur, ſi dicamus easdem quantitates, quae ſint nihilo minores, ſimul infinito maiores cenſeri poſſe. Non ſolum enim ex algebra, ſed etiam ex geometria diſcimus, duplicem dari ſaltum a quantitatibus poſitiuis ad negatiuas, alterum per cyphram, ſeu nihilum, alterum per infinitum: atque adeo quantitates a cyphra, tam creſcendo, quam decreſcendo, in ſe redire, et ad eundem terminum o reuerti; ita vt quantitates infinito maiores eaedem perinde ſint nihilo minores, ac quantitates infinito minores conueniunt cum quantitatibus nihilo maioribus.

§. 9. Qui autem negant has ſummas ſerierum diuergentium, quae aſſignari ſolent, eſſe iuſtas, iidem non ſolum non alias proferunt, ſed etiam ſtatuunt omnino pugnare, ſummam ſeriei diuergentis tantum imaginari. Conuergentium enim ſerierum, veluti huius $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+$ etc. ideo tantum ſummam $=2$ admitti poſſe, quod quo plures iſtius ſeriei terminos actu addamus, eo propius nos ad binarium peruenire: in ſeriebus vero diuergentibus rem longe ſecus ſe habere; quo plures enim terminos addamus, eo magis ſummas,

quae

quae prodeunt, inter ſe diſcrepare, neque ad certum ac determinatum quemdam valorem accedere. Vnde concludunt, ne ideam quidem ſummae ad ſeries diuergentes transferri poſſe, eorumque operam, quae in ſummis ſerierum diuergentium inueſtigandis conſumatur, plane eſſe inutilem, verisque analyſeos principiis contrariam.

§ 10. Quantumuis autem iſte diſſenſus realis videatur, tamen neutra pars ab altera vllius erroris argui poteſt, quoties in analyſi huiusmodi ſerierum vſus occurrit: quod graui argumento eſſe debet, neutram partem in errore verſari, ſed totum diſſidium in ſolis verbis eſſe poſitum. Si enim in calculo peruenio ad hanc ſeriem $1-1+1-1+1-1+$ etc. eiusque loco ſubſtituo $\frac{1}{2}$; nemo certe mihi iure errorem imputabit; qui tamen nemini non in oculos incurreret, ſi alium quemuis numerum eius ſeriei loco poſuiſſem; vnde nullum dubium ſupereſſe poteſt, quin ſeries $1-1+1-1+1-1+$ etc. et fractio $\frac{1}{2}$ ſint quantitates aequiualentes, alteramque alterius loco ſemper ſine errore ſubſtitui licere. Tota igitur quaeſtio huc tantum redire videtur, an fractionem $\frac{1}{2}$ recte ſummam ſeriei $1-1+1-1+$ etc. vocemus? quod, qui pertinaciter negant, cum tamen aequiualentiam negare non audeant, vehementer verendum eſt, ne in logomachiam delabantur.

§. 11. Puto autem, totam hanc litem facile compoſitum iri, ſi ad ſequentia ſedulo attendere velimus. Quoties in analyſi ad expreſſionem vel fractam, vel transcendentem, pertingimus; toties eam in idoneam ſeriem conuertere ſolemus, ad quam ſequens calculus commodius applicari queat. Eatenus ergo tantum ſeries

 infini-

infinitae in analyſi locum inueniunt, quatenus ex euolutione cuiuspiam expreſſionis finitae ſunt ortae; et hanc ob rem in calculo ſemper loco cuiusque ſeriei infinitae eam formulam, ex cuius euolutione eſt nata, ſubſtituere licet. Hinc quemadmodum ſummo cum fructu regulae tradi ſolent, expreſſiones finitas, ſed forma minus idonea praeditas, in ſeries infinitas conuertendi, ita viciſſim vtiliſſimae ſunt cenſendae regulae, quarum ope, ſi propoſita fuerit ſeries infinita quaecunque, ea expreſſio finita inueſtigari queat, ex qua ea reſultet; et cum haec expreſſio, ſemper ſine errore loco ſeriei infinitae ſubſtitui poſſit, neceſſe eſt, vt vtriusque idem ſit valor; ex quo efficitur, nullam dari ſeriem infinitam, quin ſimul expreſſio finita illi aequiualens concipi queat.

§. 12. Si igitur receptam ſummae notionem ita tantum immutemus, vt dicamus, cuiusque ſeriei ſummam eſſe expreſſionem finitam, ex cuius euolutione illa ipſa ſeries naſcatur; omnes difficultates, quae ab vtraque parte ſunt commotae, ſponte euaneſcent. Primo enim ea expreſſio, ex cuius euolutione naſcitur ſeries conuergens, eius ſimul ſummam, voce hac vulgari ſenſu accepta, exhibet, neque ſi ſeries fuerit diuergens, quaeſtio amplius abſurda reputari poterit, ſi eam indagemus expreſſionem finitam, quae ſecundum regulas analyticas euoluta, illam ipſam ſeriem producat. Et quoniam iſtam expreſſionem in calculo loco eius ſeriei ſubſtituere licet, quin eidem ſit aequalis, dubitare non poterimus. Quo euicto, ne a recepto quidem loquendi vſu recedimus, ſi eam expreſſionem, quae cuipiam ſeriei aequalis eſt, eius quoque ſummam vocemus: dummodo pro

ſeriebus

ſeriebus diuergentibus, non eam notionem cum idea ſummae coniungamus, quod, quo plures termini actu colligantur, eo propius ad valorem ſummae accedi debeat.

§. 13. His praemiſſis neminem fore arbitror, qui me reprehendendum putet, quod in ſummam ſequentis ſeriei diligentius inquiſiuerim:

$$1-1+2-6+24-120+720-5040+40320-\text{etc.}$$

quae eſt ſeries a Walliſio hypergeometrica dicta, ſignis alternantibus inſtructa. Haec ſeries autem eo magis notatu digna videtur, quod plures ſummandi methodos, quae mihi alias in huiusmodi negotio ingentem vſum praeſtiterunt, hic fruſtra tentauerim. Primo quidem dubitare licet, vtrum haec ſeries ſummam habeat finitam, nec ne? quia multo magis diuergit, quam vlla ſeries geometrica; ſummam autem geometricarum eſſe finitam, extra dubium eſt poſitum. Veruntamen cum in geometricis diuergentia non obſtet, quominus ſint ſummabiles, ita veriſimile videtur, et hanc ſeriem hypergeometricam ſummam habere finitam. Quaeritur ergo in numeris, proxime ſaltem, valor eius expreſſionis finitae, ex cuius euolutione ipſa ſeries propoſita naſcitur.

§. 14. Primo autem vſus ſum methodo, quae hoc nititur fundamento: ſi propoſita ſit huiusmodi ſeries:

$$s=a-b+c-d+e-f+g-h+\text{etc.}$$

atque neglectis ſignis terminorum $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, etc. ſumantur differentiae: $b-a$, $c-b$, $d-c$, $e-d$, etc. harumque porro differentiae: $c-2b+a$; $d-2c+b$;

$c - 2d + e$, etc. quae dicuntur differentiae ſecundae; ſimilique lege quaerantur differentiae tertiae, quartae, quintae, etc. tum ſi harum differentiarum primarum, ſecundarum, tertiarum, quartarum etc. termini primi ſint $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. dico fore eiusdem ſeriei propoſitae ſummam

$$s = \tfrac{a}{2} - \tfrac{\alpha}{4} + \tfrac{\beta}{8} - \tfrac{\gamma}{16} + \tfrac{\delta}{32} - \text{etc.}$$

quae niſi iam ſit conuergens, tamen certo multo magis conuerget, quam propoſita; vnde ſi huic poſteriori ſeriei denuo eadem methodus applicetur, valor, ſeu ſumma quaeſita $s$, expreſſa reperietur per ſeriem adhuc magis conuergentem.

§. 15. Methodus haec maximam habet vtilitatem in ſummandis ſeriebus diuergentibus ſecundae et quartae ſpeciei, ſiue tandem ad differentias conſtantes perueniatur, ſiue ſecus, dummodo diuergentia non ſit nimis magna. Sic ſi ſit $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \text{etc.}$

ob $a = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ etc. erit $s = \tfrac{1}{2}$.

Si ſit $s = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.}$

diff. 1 1, 1, 1, 1, 1. etc.

erit $s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}$; vti aliunde ſatis conſtat:

ſi ſit $s = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 + \text{etc.}$

Diff. I . . 3 5 7 9 11

diff. II . . . 2, 2, 2 2

erit $s = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{8} = 0$, vti quoque notum eſt:

Si ſit $s = 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \text{etc.}$

Diff.

Diff. 1 . . 2, 6, 18, 54, 162
diff. 2 . . . . 4, 12, 36, 108
diff. 3 . . . . 8, 24, 72
diff. 4 . . . . . . 16, 48
etc.

eritque $s = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{4}{8} - \frac{8}{16} + \text{etc.} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \text{etc.} = \frac{1}{4}$

§. 16. Adhibeatur iam haec methodus ad ſeriem propoſitam

$A = 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - 5040 + 40320 - \text{etc.}$
quae ob $1 - 1 = 0$, ſi per 2 diuidatur, abit in hanc:

$\frac{A}{2} = 1 - 3 + 12 - 60 + 360 - 2520 + 20160 - 181440 + \text{etc.}$
2, 9, 48, 300, 2160, 17640, 161280
7, 39, 252, 1860, 15480, 143640
32, 213, 1608, 13620, 128160
181, 1395, 12012, 114540
1214, 10617, 102528
9407, 91911
82504.

Hinc ergo ſequitur fore:

$\frac{A}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{7}{8} - \frac{32}{16} + \frac{181}{32} - \frac{1214}{64} + \frac{9407}{128} - \frac{82508}{256} + \text{etc.}$
ſeu $A = \frac{7}{4} - \frac{32}{8} + \frac{181}{16} - \frac{1214}{32} + \frac{9407}{64} - \frac{82504}{128} + \text{etc.}$

$\frac{18}{8}$, $\frac{117}{16}$, $\frac{852}{32}$, $\frac{6879}{64}$, $\frac{64680}{128}$
$\frac{81}{16}$, $\frac{618}{32}$, $\frac{5275}{64}$, $\frac{49772}{128}$
$\frac{456}{32}$, $\frac{4039}{64}$, $\frac{39188}{128}$
$\frac{3127}{64}$, $\frac{31104}{128}$
$\frac{24850}{128}$

Ergo

Ergo $A = \frac{7}{8} - \frac{18}{32} + \frac{81}{128} - \frac{456}{512} + \frac{3127}{2048} - \frac{24850}{8192} + \text{ect.}$

ſeu $A - \frac{5}{16} = \frac{81}{128} - \frac{456}{512} + \frac{3127}{2048} - \frac{24850}{8192} + \text{etc.}$

$$\frac{182}{512};\quad \frac{1303}{2048},\quad \frac{12342}{8192}$$

$$\frac{775}{2048};\quad \frac{7130}{8192}$$

$$\frac{4030}{8192}$$

Ergo $A - \frac{5}{16} = \frac{81}{256} - \frac{182}{2048} + \frac{775}{16384} - \frac{4030}{131072}$

ſeu $A = \frac{5}{16} + \frac{516}{2048} + \frac{2170}{131072}$ etc. $= \frac{38077}{65536} = 0,581$.
Apparet ergo ſummam iſtius ſeriei propemodum eſſe $= 0,581$: ob terminos autem neglectos aliquanto erit maior: quod egregie conuenit cum infra demonſtrandis, vbi huius ſeriei ſumma oſtendetur eſſe $= 0,59634739$: ſimul vero patet, hanc methodum non ſatis eſſe aptam, ad ſummam tam exacte definiendam.

§. 17. Deinde alio modo rem ſic tentaui: ſit propoſita haec ſeries:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $n$ | $n+1$ |
| B ... | 1, | 2, | 5, | 16, | 65, | 326, | 1957, ... | P, | $n$P+1 |

differentiae 1, 3, 11, 49, 261, 1631
2, 8, 38, 212, 1370
6, 30, 174, 1158
24, 144, 984
120, 840
720

cuius differentiarum continuarum termini primi ſint 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. erit terminus exponenti $n$ reſpondens

P =

$$P = 1 + (n-1) + (n-1)(n-2) + (n-1)(n-2)(n-3) + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \text{etc.}$$

Hinc ſi fiat $n = 0$, erit terminus exponenti $0$ reſpondens, ſeu primum praecedens $= 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.} = A$; ita vt ſi huius ſeriei terminus exponenti $0$ reſpondens inueniri poſſet, idem ſimul futurus eſſet valor, ſeu ſumma ſeriei propoſitae

$$A = 1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \text{etc.}$$

Quodſi ergo illa ſeries B inuertatur, vt habeatur ſeries

$$\begin{array}{lccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ C \ldots & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{16}, & \frac{1}{65}, & \frac{1}{326}, & \frac{1}{1957}, & \text{etc.} \end{array}$$

erit huius ſeriei terminus exponenti $0$ reſpondens $= \frac{1}{A}$, vnde ex eo quoque valor ipſius A cognoſci poterit. Inchoent huius ſeriei ſingulae differentiae terminis $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, etc. differentiis ſcilicet hic ita capiendis, vt quiuis terminus a praecedente ſubſtrahatur, erit terminus exponenti $n$ reſpondens:

$$\frac{1}{P} = 1 - (n-1)\alpha + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\beta - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\gamma + \text{etc.}$$

Ideoque poſito $n = 0$, erit per ſeriem certo conuergentem:

$$\frac{1}{A} = 1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$$

Eſt vero, has fractiones in decimales conuertendo:

| | diff. 1 | diff. 2 | diff. 3 | diff. 4 | diff. 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $1 = 1,0000000$ | | | | | |
| | 5000000 | | | | |
| $\frac{1}{2} = 0,5000000$ | | 2000000 | | | |
| | 3000000 | | | | |
| $\frac{1}{5} = 0,2000000$ | | 1625000 | 375000 | −346154 | |
| $\frac{1}{16} = 0,0625000$ | 1375000 | 903846 | 721154 | +165291 | −511445 |
| $\frac{1}{65} = 0,0153846$ | 471154 | 347983 | 555863 | +305486 | −140795 |
| $\frac{1}{326} = 0,0030675$ | 123171 | 97606 | 250377 | +173956 | +131530 |
| $\frac{1}{1957} = 0,0005110$ | 25565 | 21185 | 76421 | + 58977 | +114979 |
| 0,0000730 | 4380 | 3741 | 17444 | + 14261 | + 44716 |
| 0,0000091 | 639 | 558 | 3183 | + 2697 | + 11564 |
| 0,0000010 | 81 | 72 | 486 | + 422 | + 2275 |
| 0,0000001 | 9 | 8 | 64 | + 57 | + 365 |
| | 1 | 1 | 7 | + 6 | + 51 |
| | | | 1 | 1 | |

Ex his ergo differentiis foret $\frac{1}{A} = 1,6517401$, et $A = 0,6$; qui ſatis bene cum ante inuento conuenit: ſed tamen ob differentias quartas, quintas, et aliquot ſequentium negatiuas, haec methodus, non ſatis eſt certa.

§ 18. Sumamus ſeriei B ſingulorum terminorum logarithmos, vt habeatur haec noua ſeries

$$\begin{array}{l} \quad\quad\;\; 1 \quad\; 2 \quad\; 3 \quad\; 4 \quad\;\; 5 \quad\;\; 6 \quad\;\; 7 \quad\;\;\; 8 \\ D \;\ldots\; l1, l2, l5, l16, l65, l326, l1957, l13700, \text{etc.} \end{array}$$

in cuius differentiis continuis more ſolito ſumtis ſint termini primi $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, etc. eritque huius ſeriei terminus exponenti $o$ reſpondens $= o - \alpha + \beta - \gamma + \delta - \varepsilon +$ etc. qui igitur erit logarithmus ſummae quaeſitae $= A$. Sunt vero hi logarithmi cum differentiis continuis ſequentes:

diff.

| | diff. 1 | diff. 2 | diff. 3 | diff. 4 | diff. 5 | diff. 6 | diff. 7 | diff. 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0000000 | | | | | | | | |
| | 0,3010300 | | | | | | | |
| 0,3010300 | | 969100 | | | | | | |
| | 0,3979400 | | 103000 | | | | | |
| 0,6989700 | | 1072100 | | −138666 | | | | |
| | 0,5051500 | | − 35666 | | +53006 | | | |
| 1,2041200 | | 1036434 | | − 85660 | | +19562 | | |
| | 0,6087934 | | −121326 | | +72568 | | −57744 | |
| 1,8129134 | | 915108 | | − 12092 | | −38182 | | +65446 |
| | 0,7003042 | | −134418 | | +34386 | | + 7702 | |
| 2,5132176 | | 789690 | | + 21294 | | −30480 | | |
| | 0,7783732 | | −113124 | | + 3906 | | | |
| 3,2915908 | | 667566 | | + 25200 | | | | |
| | 0,8451298 | | − 87924 | | | | | |
| 4,1397206 | | 579642 | | | | | | |
| | 0,9030940 | | | | | | | |
| 5,0398146 | | | | | | | | |

ergo erit:

| | diff. 1 | diff. 2 | diff. 3 | diff. 4 | diff. 5 | diff. 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A = −0,3010300 + | | | | | | |
| | +2041200 | | | | | |
| +0,0969100 + | | +1175100 | | | | |
| | + 866100 | | +550066 | | | |
| −0,0103000 + | | +1624434 | | +359570 | | |
| | + 241666 | | +191096 | | + 826928 | |
| −0,0138666 − | | +433338 | | −467358 | | +2133994 |
| | − 191672 | | +658454 | | −1307066 | |
| −0,0053006 + | | − 225116 | | +830778 | | −2083670 |
| | + 33444 | | −181254 | | + 776604 | |
| +0,0019562 + | | − 43862 | | + 63104 | | |
| | + 77306 | | −244358 | | | |
| +0,0057744 − | | + 200496 | | | | |
| | − 123120 | | | | | |
| +0,0065446 + | | | | | | |

vnde per methodum ante expoſitam erit

$$l\frac{A}{1} = \frac{0,3010300}{2} + \frac{2041200}{4} + \frac{1175100}{8} + \frac{550666}{16} + \frac{359570}{32} + \frac{826928}{64} + \text{etc.}$$

ſeu $l\frac{A}{1} = 0,7779088$ hincque $A = 0,59966$, quem numerum adhuc vero maiorem eſſe, facile colligere licet. Interim tamen et hoc modo neque ſatis tuto, neque ſatis commode, ad cognitionem valoris A perueniri poteſt, etſi haec methodus infinitas ſuppeditat vias hunc valorem inveſtigandi; quarum quidem aliae aliis ad hunc ſcopum multo aptiores videntur.

§. 19. Inveſtigemus nunc etiam analytice huius ſeriei valorem, eam vero in latiori ſenſu accipiamus: ſit igitur

$$s = x - 1x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 24x^5 - 120x^6 + \text{etc.}$$

quae differentiata dabit:

$$\frac{ds}{dx} = 1 - 2x + 6xx - 24x^3 + 120x^4 - \text{etc.} = \frac{x-s}{xx}$$

vnde fit $ds + \frac{s\,dx}{xx} = \frac{dx}{x}$, cuius aequationis, ſi $e$ ſumatur pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, integrale erit $e^{-1:x}s = \int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$ et $s = e^{1:x} \int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$. Caſu ergo quo $x = 1$ erit $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \text{etc.} = e\int \frac{e^{-1:x}dx}{x}$. Exprimit ergo haec ſeries aream lineae curuae, cuius natura inter abſciſſam $x$ et $y$ hac continetur aequatione $y = \frac{e.e^{-1:x}}{x}$, ſi abſciſſa $x$ ponatur $= 1$: ſeu erit $y = \frac{e}{e^{1:x}x}$. Haec autem curua ita eſt comparata, vt poſito $x = 0$ fiat $y = 0$; ſin autem ſit $x = 1$, erit $y = 1$: medii vero applicatae valores ita ſe habebunt, vt

ſi ſit

| ſi ſit | fiat | ſi ſit | fiat |
|---|---|---|---|
| $x = \frac{0}{10}$ | $y = 0$ | $x = \frac{5}{10}$ | $y = \frac{10}{5e^{5:5}} = \frac{2}{e}$ |
| $x = \frac{1}{10}$ | $y = \frac{10}{e^{9:1}}$ | $x = \frac{6}{10}$ | $y = \frac{10}{6e^{4:6}}$ |
| $x = \frac{2}{10}$ | $y = \frac{10}{2e^{8:2}}$ | $x = \frac{7}{10}$ | $y = \frac{10}{7e^{3:7}}$ |
| $x = \frac{3}{10}$ | $y = \frac{10}{3e^{7:3}}$ | $x = \frac{8}{10}$ | $y = \frac{10}{8e^{2:8}}$ |
| $x = \frac{4}{10}$ | $y = \frac{10}{4e^{6:4}}$ | $x = \frac{9}{10}$ | $y = \frac{10}{9e^{1:9}}$ |

Hac igitur curva conſtructa, ſtatim patebit, eius aream abſciſſae $x = 1$ reſpondentem, non ſolum eſſe finitam, ſed etiam minorem eſſe quadrato lateris $= 1$, maiorem vero eius ſemiſſi $\frac{1}{2}$. Quodſi vero baſis $x = 1$ in decem partes aequales diuidatur, et portiones areae tanquam trapezia ſpectentur, et areae inueſtigentur, obtinebitur ſeriei $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 +$ etc. $= A$ valor vero proximus:

$$A = 0 + \frac{1}{e^{9:1}} + \frac{1}{2e^{8:2}} + \frac{1}{3e^{7:3}} + \frac{1}{4e^{6:4}} + \frac{1}{5e^{5:5}} + \frac{1}{6e^{4:6}}$$
$$+ \frac{1}{7e^{3:7}} + \frac{1}{8e^{2:8}} + \frac{1}{9e^{1:9}} + \frac{1}{20}$$

Qui termini, cum ſit $e = 2,71828182 8$, induent ſequentes valores:

$$\frac{1}{e^{9:1}} = 0,00012340$$
$$\frac{1}{2e^{8:2}} = 0,00915782$$
$$\frac{1}{3e^{7:3}} = 0,03232324$$
$$\frac{1}{4e^{6:4}} = 0,05578253$$
$$\frac{1}{5e^{5:5}} = 0,07357587$$
$$\frac{1}{6e^{4:6}} = 0,08556950$$
$$\frac{1}{7e^{3:7}} = 0,09306270$$
$$\frac{1}{8e^{2:8}} = 0,09735002$$
$$\frac{1}{9e^{1:9}} = 0,09942656$$
$$\frac{1}{20} = 0,05000000$$

hinc $A = 0,59637164$

qui valor a vero iam vix ſenſibiliter differt. Si autem abſciſſa in plures partes fuiſſet diuiſa, tum iſte valor accuratius eſſet inuentus.

§. 20. Cum inuenta ſit ſumma $A = \int \frac{e^{1-1:x}dx}{x}$, ponatur $v = e^{1-1:x}$, ita vt poſito $x = 0$ fiat et $v = 0$,

ac poſito $x = 1$, $v = 1$, erit $1 - \frac{1}{x} = lv$, et $x = \frac{1}{1 - lv}$, atque $lx = -l(1 - lv)$, vnde fit $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(1 - lv)}$. Quia ergo eſt $A = \int \frac{v\,dx}{x}$ poſito $x = 1$, vel $v = 1$; erit quoque $A = \int \frac{dv}{1 - lv}$ poſito poſt integrationem $v = 1$. Erit autem integratione per ſeriem infinitam peracta $A = \int \frac{dv}{1 - lv}$ $= \frac{v}{1 - lv} - \frac{1\,v}{(1 - lv)^2} + \frac{1.2\,v}{(1 - lv)^3} - \frac{1.2.3\,v}{(1 - lv)^4} + \frac{1.2.3.4\,v}{(1 - lv)^5} -$ etc. et poſito $v = 1$ ob $lv = 0$, erit, vti aſſumſimus,

$$A = 1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + 1.2.3.4 - 1.2.3.4.5 + \text{etc.}$$

Erit ergo A iterum area curuae, cuius natura inter abſciſſam $v$ et applicatam $y$ hac exprimitur aequatione $y = \frac{1}{1 - lv}$, ſi quidem ponatur abſciſſa $v = 1$, quo caſu quoque fit $y = 1$. Notari autem hic oportet $lv$ denotare logarithmum hyperbolicum ipſius $v$. Abſciſſa ergo $v = 1$ denuo in decem partes diuiſa, applicatae in ſingulis diuiſionum punctis ſe habebunt hoc modo:

| ſi ſit | erit | ſi ſit | erit |
|---|---|---|---|
| $v = \frac{0}{10}$ | $y = 0$ | $v = \frac{5}{10}$ | $y = \frac{1}{1 + l10 - l5}$ |
| $v = \frac{1}{10}$ | $y = \frac{1}{1 + l10 - l1}$ | $v = \frac{6}{10}$ | $y = \frac{1}{1 + l10 - l6}$ |
| $v = \frac{2}{10}$ | $y = \frac{1}{1 + l10 - l2}$ | $v = \frac{7}{10}$ | $y = \frac{1}{1 + l10 - l7}$ |
| $v = \frac{3}{10}$ | $y = \frac{1}{1 + l10 - l3}$ | $v = \frac{8}{10}$ | $y = \frac{1}{1 + l10 - l8}$ |
| $v = \frac{4}{10}$ | $y = \frac{1}{1 + l10 - l4}$ | $v = \frac{9}{10}$ | $y = \frac{1}{1 + l10 - l9}$ |
| $v = \frac{5}{10}$ | $y = \frac{1}{1 + l10 - l5}$ | $v = \frac{10}{10}$ | $y = 1$ |

Hincque iterum per appropinquationem areae valor litterae A ſatis accurate obtinebitur.

§. 21.

§. 21. Datur vero alius modus in ſummam huius ſeriei inquirendi ex natura fractionum continuarum petitus, qui multo facilius et promtius negotium conficit: ſit enim formulam generalius exprimendo:

$$A = 1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.} = \frac{1}{1+B}$$

$$\text{erit } B = \frac{1x - 2x^2 + 6x^3 - 24x^4 + 120x^5 - 720x^6 + 5040x^7 - \text{etc.}}{1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}} = \frac{x}{1+C}$$

$$\text{et } 1 + C = \frac{1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}}{1 - 2x + 6x^2 - 24x^3 + 120x^4 - 720x^5 + 5040x^6 - \text{etc.}}$$

$$\text{Ergo } C = \frac{x - 4x^2 + 18x^3 - 96x^4 + 600x^5 - 4320x^6 + \text{etc.}}{1 - 2x + 6x^2 - 24x^3 + 120x^4 - 720x^5 + \text{etc.}} = \frac{x}{1+D}$$

$$\text{vnde } D = \frac{2x - 12x^2 + 72x^3 - 480x^4 + 3600x^5 - \text{etc.}}{1 - 4x + 18x^2 - 96x^3 + 600x^4 - \text{etc.}} = \frac{2x}{1+E}$$

$$\text{Porro } E = \frac{2x - 18x^2 + 144x^3 - 1200x^4 + \text{etc.}}{1 - 6x + 36x^2 - 240x^3 + \text{etc.}} = \frac{2x}{1+F}$$

$$\text{Atque } F = \frac{3x - 36x^2 + 360x^3 - \text{etc.}}{1 - 9x + 72x^2 - 600x^3 + \text{etc.}} = \frac{3x}{1+G}$$

$$\text{Erit } G = \frac{3x - 48x^2 + \text{etc.}}{1 - 12x + 120x^2} = \frac{3x}{1+H}$$

$$\text{Sic } H = \frac{4x - \text{etc.}}{1 - 16x} = \frac{4x}{1+I}$$

Sicque porro patebit fore $I = \frac{4x}{1+K}$, $K = \frac{1x}{5+L}$; $L = \frac{5x}{1+K}$ etc. in infinitum, ita vt harum formularum ordo facile perſpiciatur. His autem valoribus ſucceſſive ſubſtitutis, erit

$$1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 720x^6 - 5040x^7 + \text{etc.} =$$

A =

$$A = \cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{6x}{1+\cfrac{6x}{1+\cfrac{7x}{\text{etc.}}}}}}}}}}}}}}$$

§. 22. Quemadmodum autem huiusmodi fractionum continuarum valor ſit inveſtigandus, alibi oſtendi: Scilicet cum ſingulorum denominatorum partes integrae ſint vnitates, ſoli numeratores in computum veniunt; ſit ergo $x = 1$, atque inveſtigatio ſummae A ſequenti modo inſtituetur:

$$A = \frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{7},\ \frac{8}{13},\ \frac{20}{34},\ \frac{44}{73},\ \frac{124}{209},\ \frac{300}{501},\ \text{etc.}$$

num. 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, etc.

Fractiones nimirum hic exhibitae continuo propius ad verum valorem ipſius A accedunt, et quidem alternatim eo ſunt maiores et minores; ita vt ſit:

$A > \frac{0}{1}$; $A > \frac{1}{2}$; $A > \frac{4}{7}$; $A > \frac{20}{34}$; $A > \frac{124}{209}$; etc.

$A < \frac{1}{1}$; $A < \frac{2}{3}$; $A < \frac{8}{13}$; $A < \frac{44}{73}$; $A < \frac{300}{051}$; etc.

Hinc in fractionibus decimalibus erunt ipſius A valores

| nimis parui | nimis magni |
|---|---|
| 0,0000000000 | 1,0000000000 |
| 0,5000000000 | 0,6666666666 |
| 0,5714285714 | 0,6153846153 |
| 0,5882352941 | 0,6027397290 |
| 0,5933014354 | 0,5988023952 |

Si iam inter terminos nimis magnos et nimis paruos proximos, capiantur media arithmetica, denuo prodibunt valores alternatim nimis magni et nimis parui, qui erunt ſequentes:

| Valores nimis parui | nimis magni ipſius A |
|---|---|
| 0,5000000000 | 0,7500000000 |
| 0,5833333333 | 0,6190476190 |
| 0,5934065933 | 0,6018099546 |
| 0,5954875100 | 0,5980205807 |
| 0,5960519153 | |

ſicque iam ſatis prope ad verum valorem ipſius A pertigimus.

§. 23. Poterimus autem valorem iſtius fractionis infinitae per partes inueſtigare hunc in modum:

ſit A

$$\text{ſit } A = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{10}{1+\cfrac{10}{1+p}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}$$

$$\text{et } p = \cfrac{11}{1+\cfrac{11}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{15}{1+\cfrac{15}{1+9}}}}}}}}}}$$

$$\text{et } q = \cfrac{16}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{17}{1+\cfrac{17}{1+\cfrac{18}{1+\cfrac{18}{1+\cfrac{19}{1+\cfrac{19}{1+\cfrac{20}{1+\cfrac{20}{1+r}}}}}}}}}}$$

$$\text{erit } r = \cfrac{21}{1+\cfrac{21}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\text{ etc. in infinitum.}}}}}}}$$

Quibus valoribus euolutis reperietur:

$$\text{primo } A = \frac{491459820 + 139931620p}{824073141 + 234662231p}$$

$$\text{Deinde } p = \frac{2381951 + 649286q}{887640 + 186440q}$$

$$\text{et } q = \frac{11437136 + 2924816r}{3697925 + 643025r}$$

Supereſt igitur, vt valor ipſius $r$ definiatur, quod quidem aeque difficile, ac ipſius A: ſed ſufficit hic valorem ipſius $r$ proxime tantum noſſe; error enim quidam in valore ipſius $r$ commiſſus, multo minorem errorem in valore ipſius $q$ efficit, hincque denuo longe minor error in valorem ipſius $p$ irrepit: ex quo tandem error valorem ipſius A inquinans omnino erit imperceptibilis.

§. 24. Deinde quia numeratores 21, 21, 22, 22, 23, etc. qui in fractionem continuam ipſius $r$ ingrediuntur, iam propius ad aequalitatis rationem accedunt, ſaltem ab initio: hinc ſubſidium peti poteſt, ad eius valorem propius cognoſcendum. Si enim hi numeratores omnes eſſent aequales, vt eſſet

$$r = \cfrac{21}{1 + \cfrac{21}{1 + \cfrac{21}{1 + \cfrac{21}{1 + \text{etc.}}}}}$$

foret $r = \frac{21}{1+r}$

ideoque $rr + r = 21$, et $r = \frac{\sqrt{85} - 1}{2}$

Cum

Cum autem hi denominatores creſcant, hic valor iuſto erit minor: Interim tamen concludere licet, ſi tres ſequentes fractiones continuae conſtituantur:

$$r = \cfrac{21}{1+\cfrac{21}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad s = \cfrac{22}{1+\cfrac{22}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{24}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad t = \cfrac{23}{1+\cfrac{23}{1+\cfrac{24}{1+\cfrac{24}{1+\cfrac{25}{1+\text{etc.}}}}}}$$

valores quantitatum $r$, $s$, $t$, in arithmetica progreſſione eſſe proceſſuros, foreque $r+t=2s$; vnde valor ipſius $r$ ſatis accurate colligetur. Quo autem haec inueſtigatio latius pateat, pro numeris 21, 22, 23, hos indefinitos accipiamus $a-1$, $a$ et $a+1$, vt ſit

$$r = \cfrac{a-1}{1+\cfrac{a-1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a+1}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad s = \cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+2}{1+\text{etc.}}}}}} \qquad t = \cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+1}{1+\cfrac{a+2}{1+\cfrac{a+2}{1+\cfrac{a+3}{1+\text{etc.}}}}}}$$

eritque:

$$r = \cfrac{a-1}{1+\cfrac{a-1}{1+s}} \qquad s = \cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+t}};$$ vnde efficitur:

$$r = \frac{(a-1)s+a-1}{s+a} \text{ et } s = \frac{at+a}{t+a+1} \text{ ſeu } t = \frac{(a+1)s-a}{a-s}$$

vnde fit $r+t=\frac{2ss+(2aa-2a+1)s-a}{aa-ss}=2s$: ideoque erit $2s^3+2ss-(2a-1)s-a=0$, ex qua aequatione valorem ipſius $s$ hincque porro valorem ipſius $r$ determinare licet.

§. 25. Sit nunc $a=22$, atque habebimus hanc aequationem cubicam reſoluendam.

$$2s^3+2ss-43s-22=0$$

cuius radix ſtatim intra limites 4 et 5 conſtituta deprehenditur. Sit igitur $s=4+u$, eritque

$$34=69u+26uu+2u^3$$

Sit porro $u=0,4+v$ erit $u^2=0,16+0,8u+vv$ atque $u^3=0,064+0,48v+1,2v^2+v^3$, ideoque.

$$2,112=90,76v+28,4v^2+2v^3$$

vnde erit, proxime $v=0,023$, et $s=4,423$. Cum igitur ſit

$r=\frac{21s+21}{s+22}$ fiet $r=\frac{113,883}{26,423}=4,31$,

hincque porro

$q=\frac{24043093}{6469363}=3,7164544 6$: vnde obtinetur

$p=\frac{4794992,85}{1584252,22}=3,0266600163$: hincque tandem

$A=\frac{9149852 59,24}{15343159 32,90}=0,5963473621237$

qui

qui valor in fractionem continuam conuerſus dat

$$A = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\text{etc.}}}}}}}}}}}}$$

vnde ſequentes inueniuntur fractiones valorem ipſius A proxime exhibentes:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & 1 & 2 & 10 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 7 \\ A = & \frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{5}, & \frac{31}{52}, & \frac{34}{57}, & \frac{65}{109}, & \frac{294}{493}, & \frac{653}{1095}, & \frac{1600}{2683} \end{array}$$

Hae autem fractiones alternatim ſunt maiores et minores quam valor ipſius A, ac vltima quidem $\frac{1600}{2683}$ nimis eſt magna, exceſſus tamen minor eſt quam $\frac{1}{2683 \cdot 19876}$; vnde cum ſit

$\frac{1}{A} = \frac{2683}{1600}$ erit proxime $\frac{1}{A} = 1{,}676875$:

§. 26. Methodus, qua ſupra in §. 21. ſum vſus ad ſeriem hanc

$$1 - 1x + 2x^2 - 6x^3 + 24x^4 - 120x^5 + 770x^6 - 5040x^7 + \text{etc.}$$

in

in fractionem continuam conuertendam, latius patet, atque ſimili modo ad hanc ſeriem multo generaliorem applicari poteſt

$$z = 1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4 - \text{etc.}$$

reperietur enim iisdem operationibus inſtitutis:

$$z = \cfrac{1}{1+\cfrac{mx}{1+\cfrac{nx}{1+\cfrac{(m+n)x}{1+\cfrac{2nx}{1+\cfrac{(m+2n)x}{1+\cfrac{3nx}{1+\cfrac{(m+3n)x}{1+\cfrac{4nx}{1+\cfrac{(m+4n)x}{1+\cfrac{5nx}{1+\text{etc.}}}}}}}}}}}$$

Eadem vero expreſſio, aliaeque ſimiles facile erui poſſunt ope theorematum, quae in diſſertationibus meis de fractionibus continuis in Comment. Acad. Petropol. demonſtraui. Oſtendi enim huic aequationi:

$$ax^{m-1}dx = dz + cx^{n-m-1}zdx + bx^{n-1}zdx$$

ſatis-

ſatisfacere hunc valorem

$$z = \cfrac{ax^n}{m + \cfrac{(ac+mb)x^n}{m+n+\cfrac{(ac-nb)x^n}{m+2n+\cfrac{(ac+(m+n)b)x^n}{m+3n+\cfrac{(ac-2nb)x^n}{m+4n+\cfrac{(ac+(m+2n)b)x^n}{m+5n+\cfrac{(ac-3nb)x^n}{m+6n+\text{etc.}}}}}}}}$$

Si igitur ſit $c=0$ erit $dz+bx^{n-1}zdx=ax^{m-1}dx$, et $e^{bx^n:n}z$ $=a\int e^{bx^n:n}x^{m-1}dx$ et $z=ae^{-bx^n:n}\int e^{bx^n:n}x^{m-1}dx$, et per ſeriem

$$z=\frac{ax^m}{m}-\frac{abx^{m+n}}{m(m+n)}+\frac{ab^2x^{m+2n}}{m(m+n)(m+2n)}-\frac{ab^3x^{m+3n}}{m(m+n)(m+2n)(m+3n)}+\text{etc.}$$

In hac autem forma noſtra, quam tractamus, non continetur.

§. 27. Inueni autem porro, ſi habeatur haec aequatio:

$$fx^{m+n}dx=x^{m+1}dz+ax^mzdx+bx^nzdx+czzdx$$

valorem ipſius $z$ per huiusmodi fractionem infinitam exprimi:

$$z=\cfrac{fx^m}{b+\cfrac{(mb+ab+cf)x^{m-n}}{b+\cfrac{(mb+nb+cf)x^{m-n}}{b+\cfrac{(2mb-nb+ab+cf)x^{m-n}}{b+\cfrac{(2mb-2nb+cf)x^{m-n}}{b+\cfrac{(3mb-2nb+ab+cf)x^{m-n}}{b+\cfrac{(3mb-3nb+cf)x^{m-n}}{b+\text{etc.}}}}}}}}$$

 Quo

Quo igitur eundem valorem $z$ commode per ſeriem ordinariam exprimere queamus, ſit $c = 0$, vt habeatur haec aequatio:

$$f x^{m+n} dx = x^{m+1} dz + a x^m z dx + b x^n z dx.$$

eritque per fractionem continuam:

$$z = \cfrac{f x^m}{b + \cfrac{b(m+a)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(m-n)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(2m-n+a)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(2m-2n)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(3m-2n+a)x^{m-n}}{b + \cfrac{b(3m-3n)x^{m-n}}{b + \text{etc.}}}}}}}}$$

Integrando vero erit $x^a e^{bx^{n-m}:(n-m)} z = f\int e^{bx^{n-m}:(m-n)} x^{a+n-1} dx$ seu ſit $m-n = k$ erit $z = f e^{b:kx^k} x^{-a} \int e^{-b:kx^k} x^{a+n-1} dx$, ſi quidem integratio ita inſtituatur, vt $z$ euaneſcat, poſito $x = 0$. Per ſeriem autem infinitam erit:

$$z = \frac{f}{b} x^m - \frac{(m+a)f}{b^2} x^{2m-n} + \frac{(m+a)(2m-n+a)f}{b^3} x^{3m-2n}$$
$$- \frac{(m+a)(2m-n+a)(3m-2n+a)f}{b^4} x^{4m-3n}$$
$$+ \frac{(m+a)(2m-n+a)(3m-2n+a)(4m-3n+a)f}{b^5} x^{5m-4n} - \text{etc.}$$

§. 28. Quo hae expreſſiones fiant ſimplices, neque tamen earum extenſioni vis inferatur, ponatur $b = 1$;

$b = 1$; ſit $= 1$; $mq + a = mp$; $m - n = q$; vt ſit $a = p - m$; et $n = m - q$; habebiturque haec aequatio differentialis:

$$x^m dy = x^{q+1} dz + (p-m) x^q z dx + z dx$$

cuius primo integrale eſt: $z = e^{1:qx^q} x^{m-p} \int e^{-1:qx^q} x^{p-q-1} dx$
Idem porro valor quantitatis $z$ per ſequentem ſeriem infinitam exprimetur:

$$z = x^m - px^{m+q} + p(p+q)x^{m+2q} - p(p+q)(p+2q)x^{m+3q} + \text{etc.}$$

Denique huic ſeriei aequiualebit iſta fractio continua:

$$z = \cfrac{x^m}{1 + \cfrac{px^q}{1 + \cfrac{qx^q}{1 + \cfrac{(p+q)x^q}{1 + \cfrac{2qx^q}{1 + \cfrac{(p+2q)x^q}{1 + \cfrac{3qx^q}{1 + \cfrac{(p+3q)x^q}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

quae expreſſio plane congruit cum ea, quam ante §. 26 ſumus adepti, et quoniam de modo, quo illam eruimus, adhuc dubitari poſſet, vtrum numeratores ſecundum legem obſeruatam in infinitum progrediantur nec ne? hoc dubium iam penitus erit ſublatum. Suppeditat ergo haec conſideratio methodum certam innumerabiles ſeries divergentes ſummandi, ſeu valores ipſis aequiualentes inveniendi: inter quas ea, quam tractauimus eſt caſus particularis.

 §. 26.

§. 29. Videtur autem porro caſus memoratu dignus, quo eſt $p = 1$, et $q = 2$, atque $m = 1$; erit enim $z = e^{1:2xx}\int e^{-1:2xx}dx : xx$

atque ſeries infinita ita ſe habebit:

$$z = x - 1x^3 + 1.3x^5 - 1.3.5x^7 + 1.3.5.7x^9 - \text{etc.}$$

quae aequalis eſt huic fractioni continuae:

$$z = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1xx}{1 + \cfrac{2xx}{1 + \cfrac{3xx}{1 + \cfrac{4xx}{1 + \cfrac{5xx}{1 + \cfrac{6xx}{1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Si itaque ponatur $x = 1$, vt fiat:

$$z = 1 - 1 + 1.3 - 1.3.5 + 1.3.5.7 - 1.3.5.7.9 + \text{etc.}$$

quae eſt ſeries maxime diuergens: eius tamen valor exprimi poteſt per hanc fractionem continuam conuergentem:

$$z = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

quae

quae ſequentes ſuppeditat fractiones, vero ipſius $x$ valori proxime aequales:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
x = \frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{4}, & \frac{6}{10}, & \frac{18}{26}, & \frac{48}{76}, & \frac{156}{232}, & \frac{492}{764},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
10 & 11 & 12 \\
\frac{1740}{2620}, & \frac{6168}{9496}, & \frac{23568}{35696}
\end{array}
$$

ſi igitur ſit $x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{7}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{10}{1+p}}}}}}}}}}}$

erit $x = \frac{23568 + 6168p}{35696 + 9496p}$

ſiue $x = \frac{2946 + 771p}{4462 + 1187p}$ et $p = \cfrac{11}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{13}{1+\cfrac{14}{1+\cfrac{15}{1+\text{etc.}}}}}}$

ſit $p = \frac{11}{1+q}$ et $q = \frac{12}{1+r}$; erit $r = \frac{12-q}{q}$

atque cum $p$, $q$, $r$ vniformiter creſcant, erit $2q = \frac{12+22q-qq}{q+qq}$ et $2q^3 + 3qq - 22q - 12 = 0$, vbi proxime $q = 3,306$; $p = 2,709$; et $x = \frac{[illegible]}{[illegible]} = 0,6557583$.

# DISSERTATIO DE PROPLEMATIBVS QVIBVSDAM CALCVLI INTEGRALIS.

*Auctore* G. W. KRAFFT.

§. 1.

*Problema* I.

Inuenire quibusnam in caſibus haec curuarum familia, ſequenti aequatione generali, trinomiali, contenta, poſſit quadrari;

$$Ax^\alpha + By^\beta = Cx^\delta y^\epsilon;$$

in qua ſunt $x$ et $y$ indeterminatae, A, B, C, etc. exponentes, conſtantes.

Quamuis variae iam cognitae ſint methodi, quibus quadraturae curuarum, per aequationes trium terminorum expreſſarum, reperiri poſſunt; ſequens tamen a caſu particulari, quem explicat *Ioh. Bernoullius*, *Operum tomo III*, *p.* 403, ad ſummam vniuerſalitatem eſt redacta. Ponamus $y = \frac{x^\lambda}{u}$, introducta noua indeterminata $u$, qui valor in aequatione propoſita ſubſtituatur, atque dabit $Ax^\alpha + \frac{Bx^{\beta\lambda}}{u^\beta} = \frac{Cx^{\delta+\epsilon\lambda}}{u^\epsilon}$, quae diuiſa per $x^\alpha$ et multiplicata per $u^\beta$, dabit hanc, $Bx^{\beta\lambda-\alpha} = Cx^{\delta+\epsilon\lambda-\alpha}u^{\beta-\epsilon} - Au^\beta$. Vt ex vna parte ſola ſuperſtes maneat variabilis

riabilis $u$, ponatur $\delta+\varepsilon\lambda-\alpha=0$; orietur $Bx^{\beta\lambda-\alpha}=Cu^{\beta-\varepsilon}-Au^{\beta}$, et hac differentiata ſequens, $(\beta\lambda-\alpha)Bx^{\beta\lambda-\alpha-1}dx=(\beta-\varepsilon)Cu^{\beta-\varepsilon-1}du-\beta Au^{\beta-1}du$. Multiplicetur illud membrum per $\frac{y}{x^{\lambda}}$, hoc autem per $\frac{1}{u}$, quae duae quantitates, vi factae poſitionis ſuperioris, ſunt aequales; atque ſic obtinebitur $(\beta\lambda-\alpha)Bx^{\beta\lambda-\alpha-\lambda-1}y\,dx=(\beta-\varepsilon)Cu^{\beta-\varepsilon-2}du-\beta Au^{\beta-2}du$. Ponatur nunc denuo exponens $\beta\lambda-\alpha-\lambda-1=0$, vt $x$ ibi abeat in vnitatem, ex quo tandem prodibit haec aequatio: $(\beta\lambda-\alpha)By\,dx=(\beta-\varepsilon)Cu^{\beta-\varepsilon-2}du-\beta Au^{\beta-2}du$, atque integralia ſumendo, talis $(\beta\lambda-\alpha)B\int y\,dx=\frac{\overline{\beta-\varepsilon}.C}{\beta-\varepsilon-1}u^{\beta-\varepsilon-1}-\frac{\beta A}{\beta-1}u^{\beta-1}+$ Conſtante. Requiruntur ergo duae conditiones ad caſum quadrabilitatis huius curuae generalis, *prima*, vt ſit $\delta+\varepsilon\lambda-\alpha=0$, hoc eſt, $\delta=\alpha-\varepsilon\lambda$ . . . . (M); *altera*, vt ſit etiam $\beta\lambda-\alpha-\lambda-1=0$, aut $\lambda=\frac{\alpha+1}{\beta-1}$; qui valor in aequatione (M) ſubrogatus, praebet $\delta=\alpha-\frac{\overline{\alpha+1}.\varepsilon}{\beta-1}$.

§. 2. Conſequitur exinde, curuam hac generali aequatione definitam,

$$Ax^{\alpha}+By^{\beta}=Cx^{\alpha-\frac{\overline{\alpha+1}.\varepsilon}{\beta-1}}y^{\varepsilon}$$

eſſe quadrabilem, ac ipſius quadraturam, methodo modo explicata, inueniri poſſe, ſi ſubſtituatur $y=\frac{x^{\frac{\alpha+1}{\beta-1}}}{u}$, vel ſi fuerit $u=\frac{x^{\frac{\alpha+1}{\beta-1}}}{y}$; et quadraturam ipſius, ſiue $\int y\,dx$, aequalem eſſe huic expreſſioni generali:

$$\frac{(\alpha+\varepsilon)\beta-\varepsilon\;C\,x^{\frac{\alpha+\varepsilon\cdot\beta-\varepsilon-1}{\beta-1}}}{(\alpha+\beta)(\beta-\varepsilon-1)\,B\,y^{\beta-\varepsilon-1}}-\frac{\beta A x^{\alpha+1}}{(\alpha+\beta)\,B\,y^{\beta-1}}$$

+ Conſtante.

§. 3. Non iam occupabor in hac quadratura huius expreſſione breuiori reddenda, quod in applicatione aliqua particulari multo melius effici poteſt; ſed potius exemplis quibusdam eandem illuſtrabo. Sit ex. gr. quadranda curua haec, $ax = y^2$, aut Parabola *Apollonii*, cuius quadratura ab *Archimede* iam cognita eſt. Poni poterit *primo* $A = a$, $\alpha = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $\varepsilon = 2$, $\beta = 5$; ſed hac ratione $\int y dx$ euaderet differentia duarum magnitudinum infinitarum, ob $B = 0$ in nominatore haerentem, unde nihil elici poteſt. Inuertatur ergo ſtilus, et ponatur $A = 0$, $B = 1$, $\beta = 2$, $C = a$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$, ex quo oritur $\int y dx = \frac{2ax^2}{3y} = \frac{2axx}{3y} = \frac{2xy}{3}$, ſubſtituto $y^2$ pro $ax$, quae eſt legitima et iuſta Parabolae quadratura.

§. 4. Aequatio circuli, poſita diametro $= a$, abſciſſis a vertice computatis $= x$, et ſemiapplicatis $= y$, eſt $x^2 + y^2 = ax$. Quodſi tentemus applicare hanc aequationem particularem noſtrae generali, tum poni debet $A = 1$, $\alpha = 2$, $B = 1$, $\beta = 2$, $C = a$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$, ob $\varepsilon = 0$; requiritur vero antea iam $\alpha = 2$; adeoque haec aequatio circuli ſub generali noſtra non continetur. Neque etiam res ſuccedit, ſi abſciſſis a centro computatis $= x$, et vocato radio $= a$, aſſumatur aequatio $x^2 + y^2 = a^2$.

§. 5. Sit aequatio curuae data haec, $x^3 + y^3 = axy$, quae eſt curua folii arborei dicta, vid. *Opp. Ioh. Bernoul-*

*Bernoullii Tom. III, pag.* 40?, *probl. VII.* Quam vt ad noſtram accommodemus, ponendum erit $A=1$, $\alpha=3$, $B=1$, $\beta=3$, $C=a$, $\epsilon=1$, vnde eruetur $\int y\,dx = \frac{2ax^2}{3y} - \frac{x^4}{2y^2}$, veluti eadem quadratura inuenta quoque eſt in *l. c.* tam, quam etiam a *Iac. Hermanno*, in *Comment. Acad. Scient. Imper. Petropol. Tomo VI, p.* 192. *ſect. V*, ſed alia methodo.

## PROBLEMA II.

§. 6. Docet *Iohann Bernoullius*, in *Lectionibus Mathem. Hoſpitalianis, Operum Tomo III pag.* 397, omnia illa ſpatia, quorum differentiale exprimitur per quantitatem rationalem multiplicatam, vel diuiſam, per applicatam Circuli vel Hyperbolae, id eſt, per $\sqrt{ax-xx}$, vel per $\sqrt{aa-xx}$, vel per $\sqrt{ax+xx}$, vel per $\sqrt{aa+xx}$ vel per $\sqrt{xx-aa}$, etc. omnia, inquam, iſta ſpatia aut quadrare, aut ad quadraturam Circuli vel Hyperbolae reducere. Methodus eſt ingenioſa et peracuta quidem, ſed valde difficilis mihi viſa, quoniam coniecturis tantum abſoluitur, quae non niſi exercitatiſſimis in hoc calculi genere in promptu eſſe poſſunt. Alia itaque via idem praeſtare conabor ſequentem in modum. Quia requiruntur differentialia rationalia, veluti $\frac{a^2x\,dx + x^3dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$, et quaelibet applicata ſectionis conicae repraeſentari poteſt per $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$: conſtabit talis quaelibet formula ex aliquot eiusmodi membris indicandis per $\frac{ex^m dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)}}$; aut vero per $ex^m dx\sqrt{(ax^2+bx+c)}$; vbi $m$ eſt rationalis numerus integer quicunque.

§. 7. Incipiamus a priori membro $\frac{e x^m dx}{\sqrt{(ax^2+bx+e)}}$ in quo ponamus $2ax+b=u$, et mutabitur expreſſio in hanc ſequentem $\frac{e.\overline{(u-b)}^m du}{2^m a^{m+\frac{1}{2}}\sqrt{(u^2+4ac-b^2)}}$, aut ſtatuendo $b^2-4ac=p^2$, et $\frac{e}{2^m a^{m+\frac{1}{2}}}=q$, in hanc $\frac{q\,du(u-b)^m}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Si iam fuerit $u-b$ eleuatum ad dignitatem numeri integri $m$: aderunt plurima membra integranda, quorum quodlibet tenebit hanc formam: $\frac{r u^n du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$.

§. 8. Hoc autem differentiale omnium commodiſſime aut integratur, aut ad quadraturam Hyperbolae reuocatur; per ingenioſam illam methodum, quam tradidit *Jacobus Hermannus*, in *Commentar. Acad. Scient. Imper. Tomo I, pag.* 151, ponendo nempe $\frac{dz}{r}=\frac{u^n du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$ et, ex appellatione ibi adhibita, $dK=u^n du$, $R=u^2-p^2$, $dR=2u\,du$, $\lambda=-\frac{1}{2}$. Erit enim ſic *aequatio canonica prima*, $u^n du = M u\,du + R\,dM$, ex qua oritur $M = A u^{n-1}+N$, et $A=\frac{1}{n}$, *ſecunda*, $\overline{n-1}.\,A p^2 u^{n-2} du = N u\,du + R\,dN$, ex qua fit $N = B u^{n-3} + O$, et $B=\frac{\overline{n-1}\,A p^2}{n-2}$; *tertia*, $\overline{n-3}.\,B p^2 u^{n-4} = O u\,du + R\,dO$, vnde deducitur $O = C u^{n-5} + P$, et $C = \frac{\overline{n-3}.B p^2}{n-4}$; *quarta* haec $\overline{n-5}.\,C p^2 u^{n-6} du = P u\,du + R\,dP$, ex qua progignitur $P = D u^{n-7} + Q$, et $D=\frac{\overline{n+5}.C p^2}{n-6}$; *quinta*, $\overline{n-7}.\,D p^2 u^{n-8} du = Q u\,du + R\,dQ$; atque ſic porro, quoniam lex progreſſionis iam abunde apparet.

apparet. Subſiſtamus nunc in hac aequatione canonica quinta, ex qua, ſubſtituto $\frac{1}{2}dR$ pro $udu$, eruitur $\overline{n-7}.$ $Dp^2u^{n-8}du = \frac{1}{2}QdR + RdQ$, et diuidendo vtrinque per $\sqrt{R} = \sqrt{(u^2-p^2)}$ exſurgit $\frac{\overline{n-7}.Dp^2u^{n-8}du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} = \frac{\frac{1}{2}QdR+RdQ}{\sqrt{R}}$ ex qua aequatione integrata naſcitur,

$$\frac{\overline{n-7}.Dp^2}{\sqrt{R}}\int\frac{u^{n-8}du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} = Q;$$

ac euolutis porro valoribus,

$A = \frac{1}{n}$, $\quad C = \frac{\overline{n-1}.\overline{n-3}.p^4}{n.\overline{n-2}.\overline{n-4}}$,

$B = \frac{\overline{n-1}.p^2}{n.\overline{n-2}}$, $\quad D = \frac{\overline{n-1}.\overline{n-3}.\overline{n-5}.p^6}{n.\overline{n-2}.\overline{n-4}.\overline{n-6}}$

etc.

Erit denique integrale quaeſitum,

$\frac{z}{r} = MR^{\lambda+1} = [Au^{n-1} + Bu^{n-3} + Cu^{n-5} + Du^{n-7} + \text{etc.} + Q]\sqrt{(u^2-p^2)}$.

§. 9. Sit nunc $n$ numerus quilibet integer, ſed impar, ex. gr. $= 7$; peruenio ad aequationem canonicam quartam, in qua eſt $P = Du^{n-7} + Q$, hoc eſt, $P = D + Q$. Eſt autem ob $n = 7$, $Q = 0$, ex valore ipſius Q modo ante definito; erit ergo integralis formulae propoſitae haec, $\frac{z}{r} = (Au^6 + Bu^4 + Cu^2 + D)$ $\sqrt{(u^2-p^2)}$, neque terminorum ſubſequentium quisquam valebit amplius, quia in aequatione canonica nihil vltra comparandum reſtat, atque E cum omnibus ſuccedentibus coefficientibus ipſum $n-7$, id eſt o, ſemper in ſe retinent Quod, cum de omnibus reliquis numeris im-

§. 7. Incipiamus a priori membro $\frac{ex^m dx}{\sqrt{(ax^2+bx+e)}}$, in quo ponamus $2ax+b=u$, et mutabitur expreſſio in hanc ſequentem $\frac{e.\overline{(u-b)}^m du}{2^m a^{m+\frac{1}{2}}\sqrt{(u^2+4ac-b^2)}}$, aut ſtatuendo $b^2-4ac=p^2$, et $\frac{e}{2^m a^{m+\frac{1}{2}}}=q$, in hanc $\frac{q\,du(u-b)^m}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Si iam fuerit $u-b$ eleuatum ad dignitatem numeri integri $m$: aderunt plurima membra integranda, quorum quodlibet tenebit hanc formam: $\frac{ru^n du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$.

§. 8. Hoc autem differentiale omnium commodiſſime aut integratur, aut ad quadraturam Hyperbolae reuocatur, per ingenioſam illam methodum, quam tradidit *Jacobus Hermannus*, in *Commentar. Acad. Scient. Imper. Tomo I, pag.* 151, ponendo nempe $\frac{dz}{r}=\frac{u^n du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$ et, ex appellatione ibi adhibita, $dK=u^n du$, $R=u^2-p^2$, $dR=2udu$, $\lambda=-\frac{1}{2}$. Erit enim ſic *aequatio canonica prima*, $u^n du=Mudu+RdM$, ex qua oritur $M=Au^{n-1}+N$, et $A=\frac{1}{n}$, *ſecunda*, $\overline{n-1}.Ap^2u^{n-2}du=Nudu+RdN$, ex qua fit $N=Bu^{n-3}+O$, et $B=\frac{\overline{n-1}.Ap^2}{n-2}$; *tertia*, $\overline{n-3}.Bp^2u^{n-4}=Oudu+RdO$, vnde deducitur $O=Cu^{n-5}+P$, et $C=\frac{\overline{n-3}.Bp^2}{n-4}$; *quarta* haec $\overline{n-5}.Cp^2u^{n-6}du=Pudu+RdP$, ex qua progignitur $P=Du^{n-7}+Q$, et $D=\frac{\overline{n+5}.Cp^2}{n-6}$; *quinta*, $\overline{n-7}.Dp^2u^{n-8}du=Qudu+RdQ$; atque ſic porro, quoniam lex progreſſionis iam abunde apparet.

apparet. Subſiſtamus nunc in hac aequatione canonica quinta, ex qua, ſubſtituto $\frac{1}{2}dR$ pro $u\,du$, eruitur $\overline{n-7}.$ $Dp^2u^{n-8}du = \frac{1}{2}QdR + RdQ$, et diuidendo vtrinque per $\sqrt{R} = \sqrt{(u^2-p^2)}$ exſurgit $\frac{\overline{n-7}.Dp^2u^{n-8}du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} = \frac{\frac{1}{2}QdR+RdQ}{\sqrt{R}}$

ex qua aequatione integrata naſcitur,

$$\frac{\overline{n-7}.Dp^2}{\sqrt{R}}\int\frac{u^{n-8}du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} = Q;$$

ac euolutis porro valoribus,

$$A = \tfrac{1}{n}, \qquad C = \frac{\overline{n-1}.\overline{n-3}.p^4}{n.\overline{n-2}.\overline{n-4}},$$

$$B = \frac{\overline{n-1}.p^2}{n.\overline{n-2}}, \qquad D = \frac{\overline{n-1}.\overline{n-3}.\overline{n-5}.p^6}{n.\overline{n-2}.\overline{n-4}.\overline{n-6}}$$

etc.

Erit denique integrale quaeſitum,

$\frac{z}{r} = MR^{\lambda+1} = [Au^{n-1} + Bu^{n-3} + Cu^{n-5} + Du^{n-7} + \text{etc} + Q]\sqrt{(u^2-p^2)}.$

§. 9. Sit nunc $n$ numerus quilibet integer, ſed impar, ex. gr. $= 7$; peruenio ad aequationem canonicam quartam, in qua eſt $P = Du^{n-7} + Q$, hoc eſt, $P = D + Q$. Eſt autem ob $n = 7$, $Q = 0$, ex valore ipſius Q modo ante definito; erit ergo integralis formulae propoſitae haec, $\frac{z}{r} = (Au^6 + Bu^4 + Cu^2 + D)\sqrt{(u^2-p^2)}$, neque terminorum ſubſequentium quisquam valebit amplius, quia in aequatione canonica nihil vltra comparandum reſtat, atque E cum omnibus ſuccedentibus coefficientibus ipſum $n-7$, id eſt 0, ſemper in ſe retinent. Quod, cum de omnibus reliquis numeris im-

paribus pariter valeat, efficit, differentiale $\frac{ru^n du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$ abſolute integrabile ſemper eſſe, ſi modo $n$ ſit numerus integer impar.

§. 10. Sit vero iam $n$ numerus quilibet integer, ſed par, veluti 8; atque erit (§. 8.) $Q = \frac{Dp^2}{\sqrt{c}} \int \frac{du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$, vnde quaeſitum integrale dabitur hoc $\frac{z}{r} = [Au^7 + Bu^5 + Cu^3 + Du]\sqrt{(u^2-p^2)} + Dp^2 \int \frac{du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Ex quo euidens eſt, ſi $n$ fuerit numerus integer par: tum differentiale $\frac{ru^n du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$ dependere a quadratura vel integratione elementi huius $\frac{du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Hoc autem ſequenti ratione conſtruitur. Sit ramus alteruter Hyperbolae aequilaterae $AMm$, cuius axis transuerſus $AB = 2p$, centrum $= C$, abſciſſa $CP = u$; erit ex natura huius curuae $PM^2 = AP \times BP = \overline{u-p}.\overline{u+p} = u^2 - p^2$; hinc ducta $CM$, et infinite vicina $Cm$, area trianguli rectanguli $CMP = \frac{CP \times PM}{2} = \frac{u\sqrt{(u^2-p^2)}}{2}$, cuius differentiale eſt $= \frac{\frac{1}{2}u^2 du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} + \frac{1}{2}du\sqrt{(u^2-p^2)} = CMm + MPpm = CMm + PM \times Pp = CMm + du\sqrt{(u^2-p^2)}$; vnde efficitur $CMm = \frac{\frac{1}{2}u^2 du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} + \frac{1}{2}du\sqrt{(u^2-p^2)} - du\sqrt{(u^2-p^2)} = \frac{\frac{1}{2}p^2 du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$; ex quo erit $\frac{du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} = \frac{2}{p^2}$ ſectoris Hyperbolici $CMm$. Quod idem alio etiam modo demonſtratur. Sit $mMT$ tangens puncti $M$; atque erit area trianguli $CmT = \frac{1}{2}CT \times pm$; area trianguli $CMT = \frac{1}{2}CT \times PM$, ergo, ſubtrahendo hanc

Tab. III. Fig. 1.

ab illa, erit area ſectoris $CMm = \frac{1}{2}CT \times (pm - PM) = \frac{1}{2}CT \times Nm$ $= \frac{1}{2}CT \times \frac{u\,du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Eſt autem per *Apollonii Conica, prop.* 37. *lib. I*, $CP(u) : CA(p) = CA(p) CT(\frac{p^2}{u})$; vnde area ſectoris Hyperbolici infinite parui $CMm$ eſt iterum $\frac{\frac{1}{2}p^2}{u} \times \frac{u\,du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} = \frac{\frac{1}{2}p^2\,du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$. Habebitur itaque integrando $\int \frac{du}{\sqrt{(u^2-p^2)}} = \frac{2}{p^2}$ ſectoris Hyperbolici $CMA$. Ex quibus manifeſtum eſt, differentiale $\frac{r u^n du}{\sqrt{(u^2-p^2)}}$ abſolute integrari poſſe, quotieſcunque $n$ ſit numerus integer *impar*; ſed idem dependere a quadratura Hyperbolae, quotieſcunque $n$ ſit numerus integer *par*.

§ 11. Conſideremus nunc alterum membrum ſuperius (§. 6.) indicatum hoc ſequens, $ex^m dx \sqrt{(ax^2+bx+c)}$, quod ſubſtituendo pariter, $2ax+b=u$, $b^2-4ac = p^2$, et $\frac{e}{2^{m+2}a^{m+\frac{3}{2}}} = q$, mutabitur in hoc ſequens, $q\,du.\,\overline{u-b}^m \sqrt{(u^2-p^2)}$. Si iam iterum fuerit $u-b$ eleuatum ad dignitatem numeri integri $m$: aderunt denuo plurima membra integranda, quorum quodlibet tenebit hanc formam, $r u^n du \sqrt{(u^2-p^2)}$. Ponendo nunc iterum, ex methodo *Hermanniana*, $\frac{dz}{r} = u^n du \sqrt{(u^2-p^2)}$, ac porro $dK = u^n du$, $R = u^2-p^2$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $dR = 2u\,du$, erit *aequatio canonica prima*, $u^n du = 3\,M u\,du + R\,dM$, ex qua eruitur $M = A u^{n-1} + N$, et $A = \frac{1}{n+2}$; *ſecunda*, $\overline{n-1}.\,A p^2 u^{n-2} du = \overline{3}\,N u\,du + R\,dN$, ex qua naſcitur $N = B u^{n-3} + O$, et $B = \frac{\overline{n-1}.\,A p^2}{n}$; *tertia*, $\overline{n-3}.\,B p^2 u^{n-4} du = \overline{3}\,O u\,du + R\,dO$, ex qua prodit $O = C u^{n-5} + P$, et $C = \frac{\overline{n-3}.\,B p^2}{n-2}$;

*quarta*, $\overline{n-5}.Cp^2u^{n-6}du = 3Pudu + RdP$, vnde prouenit $P = Du^{n-7} + Q$, ac $D = \frac{\overline{n-5}.Cp^2}{n-4}$; *quinta*, $\overline{n-7}.Dp^2u^{n-8}du = 3Qudu + RdQ$; atque ſic porro, cum lex progreſſionis etiam hic abunde ſit manifeſta. Subſiſtamus nunc in hac aequatione canonica quinta, ex qua, ſubſtituto $\frac{1}{2}dR$ pro $udu$, et multiplicando per $\sqrt{R}\sqrt{(u^2-p^2)}$, deducitur $\overline{n-7}.Dp^2u^{n-8}du\sqrt{(u^2-p^2)} = (\frac{3}{2}QdR + RdQ)\sqrt{R}$, ex qua integrata progignitur, $\frac{\overline{n-7}.Dp^2}{R^{\frac{3}{2}}}\int u^{n-8}du\sqrt{(u^2-p^2)} = Q$, ac euolutis valoribus

$$A = \frac{1}{n+2} \qquad C = \frac{\overline{n-3}.\overline{n-1}.p^4}{n.\overline{n+2}.\overline{n-2}},$$

$$B = \frac{\overline{n-1}.p^2}{n.\overline{n+2}} \qquad D = \frac{\overline{n-5}.\overline{n-3}.\overline{n-1}.p^6}{n.\overline{n+2}.\overline{n-2}.\overline{n-4}},$$

etc.

Erit denique integrale quaeſitum $\frac{z}{r} = MR^{\lambda+1} = [Au^{n-1} + Bu^{n-3} + Cu^{n-5} + Du^{n-7} + \text{etc.} + Q](u^2-p^2)^{\frac{3}{2}}$.

§. 12. Sit nunc denuo $n$ numerus quilibet integer, ſed impar, ex. gr. 7; peruenio ad aequationem canonicam quartam, in qua eſt, $P = Du^{7-7} + Q = D + Q$, aequatio autem canonica ſequens quinta dabit, $0 = 3Qudu + RdQ$, vnde $Q = 0$, quod etiam ex valore ipſius $Q$, modo inuento, patet; et $P = D$; ex quo apparet, in hoc etiam caſu quantitatem propoſitam eſſe abſolute integrabilem, quoties fuerit $n$ numerus impar. Si vero idem $n$ ſit numerus par, ex. gr. 4, inuenio in aequatione canonica ſecunda, $N = Bu + O$, et ex ſubſequente tertia, $Bp^2du = 3Oudu + RdO = \frac{3OdR}{2} + RdO$, quae multiplicata per $\sqrt{(u^2-p^2)} = \sqrt{R}$, abit in hanc, $Bp^2du\sqrt{(u^2-p^2)} = (\frac{3}{2}OdR + RdO)\sqrt{R}$; ſed haec eſt integra-

integrabilis in altero membro, et praebet $Bp^2 \int du \sqrt{(u^2-p^2)}$ $= OR^{\frac{3}{2}}$; vnde valor deſiderati adhuc O definitur, dependens nempe a quadratura ſuperioris Hyperbolae. (§. 10. Patet itaque ſimul hoc, quantitatem propoſitam $u^n du \sqrt{(u^2-p^2)}$ requirere quadraturam Hyperbolae, quoties $n$ fuerit numerus par.

§. 13. Commodius porro etiam ſequenti inſtituto, paſſim cognito, hae hucusque pertractatae, et aliae plures innumerae, quantitates ad ſua integralia reuocari poterunt, ſi aſſumantur quantitates finitae pro lubitu, eae differentientur, ac denique differentialis quaedam oblata cum hac indeterminata differentiale comparetur. Quod exemplis, vſus ſaltim gratia, ſtatim illuſtrabo. Quantitatis huius ſequentis, $(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)$ $\sqrt{(\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon)}$ differentiale eſt tale:

$$\left\{ \left.\begin{matrix} \frac{1}{2}A\delta \\ B\varepsilon \end{matrix}\right\} dx + \left.\begin{matrix} A\gamma \\ \frac{3}{2}B\delta \\ 2C\varepsilon \end{matrix}\right\} x\,dx + \left.\begin{matrix} \frac{3}{2}A\beta \\ 2B\gamma \\ \frac{5}{2}C\delta \\ 3D\varepsilon \end{matrix}\right\} x^2 dx + \right.$$

$$\left.\begin{matrix} 2A\alpha \\ \frac{5}{2}B\beta \\ 3C\gamma \\ \frac{7}{2}D\delta \\ 4E\varepsilon \end{matrix}\right\} x^3 dx + \left.\begin{matrix} 3B\alpha \\ \frac{7}{2}C\beta \\ 4D\gamma \\ \frac{9}{2}E\delta \end{matrix}\right\} x^4 dx + \left.\begin{matrix} 4C\alpha \\ \frac{9}{2}D\beta \\ 5E\gamma \end{matrix}\right\} x^5 dx$$

$$\left. + \left.\begin{matrix} 5D\alpha \\ \frac{11}{2}E\beta \end{matrix}\right\} x^6 dx + 6E\alpha x^7 dx \right\} : \sqrt{(\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon)},$$

quod adeo ſuperius integrale habet perfectum. Si nunc integranda veniat haec quantitas, $\frac{a^2 x\,dx + x^3 dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$, facile eruentur

eruentur quantitates ſequentes, incipiendo comparationem a nominatore differentialis, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, $\varepsilon = -a^2$, $B = 0$, $D = 0$, $E = 0$, $C = \frac{1}{3}$, $A = \frac{5a^2}{3}$, vnde erit quaeſita integralis $\frac{(5a^2 + x^2)\sqrt{(x^2 - a^2)}}{3}$.

§. 14. Simili modo differentiale quantitatibus huius, $\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}{\sqrt{(\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon)}}$, eſt hoc:

$$\left.\begin{matrix} + B\varepsilon \\ -\frac{1}{2}A\delta \end{matrix}\right\} dx + \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}B\delta \\ 2C\varepsilon \\ -A\gamma \end{matrix}\right\} x\,dx + \left.\begin{matrix} +\frac{3}{2}C\delta \\ 3D\varepsilon \\ -\frac{3}{2}A\beta \end{matrix}\right\} x^2 dx + \left.\begin{matrix} +\frac{5}{2}D\delta \\ +C\gamma \\ 4E\varepsilon \\ -2A\alpha \\ -\frac{1}{2}B\beta \end{matrix}\right\} x^3 dx$$

$$\left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}C\beta \\ +2D\gamma \\ +\frac{7}{2}E\delta \\ -B\alpha \end{matrix}\right\} x^4 dx + \left.\begin{matrix} +3E\gamma \\ +\frac{5}{2}D\beta \end{matrix}\right\} x^5 dx + \left.\begin{matrix} +D\alpha \\ +\frac{5}{2}E\beta \end{matrix}\right\} x^6 dx +$$

$$\left. 2E\alpha x^7 dx \right\} : (\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon)^{\frac{3}{2}}.$$

Vt ſi quaeratur integrale ipſius $\frac{-2a\,dx - ax\,dx + 4x^4 dx + 9x^5 dx}{(x^2 + 4x)^{\frac{3}{2}}}$, facta comparatione, incipiendo rurſus a nominatore, eruetur $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 0$, $A = a$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 3$, et quaeſitum integrale ipſum $\frac{a + 3x^4}{\sqrt{(x^2 + 4x)}}$.

§. 15. Haud alia ratione tractari poſſunt etiam illa differentialia, quae aliquam inuoluunt quadraturam ſectionis conicae. Cum itaque $\sqrt{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}$ exprimat generaliter applicatam talis alicuius ſectionis, aſſumam ad imitationem priorum hanc formulam generalem: $(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)\sqrt{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}$ $+ F\int dx$

$+ \mathrm{F} \int dx \sqrt{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}$ quae a tali quadratura dependebit, et differentiata ſubminiſtrat hanc:

$$\left\{ \left. \begin{matrix} \tfrac{1}{2}\mathrm{A}\beta \\ +\mathrm{B}\gamma \\ \mathrm{F}\gamma \end{matrix} \right\} dx + \left. \begin{matrix} \mathrm{A}\alpha \\ \tfrac{3}{2}\mathrm{B}\beta \\ 2\mathrm{C}\gamma \\ \mathrm{F}\beta \end{matrix} \right\} x\,dx + \left. \begin{matrix} 2\mathrm{B}\alpha \\ \tfrac{5}{2}\mathrm{B}\beta \\ 3\mathrm{D}\gamma \\ \mathrm{F}\alpha \end{matrix} \right\} x^2 dx + \left. \begin{matrix} 3\mathrm{C}\alpha \\ \tfrac{7}{2}\mathrm{D}\beta \\ 4\mathrm{E}\gamma \end{matrix} \right\} x^3 dx \right.$$

$$\left. + \left. \begin{matrix} 4\mathrm{D}\alpha \\ \tfrac{9}{2}\mathrm{E}\beta \end{matrix} \right\} x^4 dx + 5\mathrm{E}\alpha x^5 dx \right\} : \sqrt{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}.$$

Sit nunc ad quadraturam circuli reuocandum hoc differentiale, $\frac{4a^2x^2dx - 4ax^3dx + x_4dx}{\sqrt{(2ax - x^2)}}$; prodibit ex comparatione terminorum homologorum, $\alpha = -1$; $\beta = 2a$, $\gamma = 0$, $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = -\frac{1}{2}a^2$, $\mathrm{E} = 0$, $\mathrm{D} = -\frac{1}{4}$, $\mathrm{C} = \frac{3}{4}a$, $\mathrm{F} = \frac{3}{4}a^2$; et deſideratum integrale erit ſequens: $(-\frac{1}{2}a^2x + \frac{3}{4}ax^2 - \frac{1}{4}x^3)\sqrt{(2ax - x^2)} + \frac{3}{4}a^2 \int dx \sqrt{(2ax - x^2)}$.

§. 16. *Problema III.* Propoſitum ſit rectificare curuam, in qua, ſumtis $x$ et $y$ coordinatis orthogonalibus, $m$ conſtante, $ds$ elemento curuae, et $r =$ radio oſculi, obtineat haec proprietas, $\frac{x\,dy - y\,dx}{r} = (m^2 - 1)ds$. Statuatur elementum curuae $ds$ conſtans; quo facto, erit $r = \frac{dy\,ds}{ddx}$; vid. *Iacobi Bernoulli Opera*, *tomo I. pag.* 578. Vnde habebitur $\frac{(x\,dy - y\,dx)ddx}{dy\,ds} = (m^2 - 1)ds$, aut vero $\frac{x\,dy\,ddx - y\,dx\,ddx}{dy\,ds} = (m^2 - 1)ds$. Eſt autem, ob $ds$ conſtans, $dx\,ddx = -dy\,ddy$, ex *loco modo citato*, et quod facile cernitur ponendo differentiale ipſius

 $ds$,

$ds$, aut ipſius $V(dx^2+dy^2)$, nihilo aequale propter eius conſtantiam; qui valor pro $dxddx$ ſubſtitutus, facta diuiſione per $dy$, dabit $xddx+yddy=(m^2-1)ds^2$, quae aequatio integrata praebet $xdx+ydy-\int(dx^2+dy^2)=(m^2-1)sds$, hoc eſt, $xdx+ydy-\int ds^2=(m^2-1)sds$, vel $xdx+ydy-sds=(m^2-1)sds$, aut, addito vtrinque $sds$, ſequentem $xdx+ydy=m^2sds$; ex qua denuo integrata prodit $x^2+y^2=m^2s^2$, aut $V(x^2+y^2)=ms$. Tenet igitur haec curua arcum ſuum quemlibet ad ſubnexam chordam in ratione conſtante $1:m$, ſiue arcus ſinguli ſunt inter ſe in ratione ſuarum chordarum.

§. 17. *Problema IV.* Aequatio $x^m dx+ydx=dy$, in qua eſt $m$ numerus quilibet integer affirmatiuus; vel generalior iſta $x^m dx+Ndx=dN$, in qua eſt N functio quaelibet ipſius $y$ et conſtantium, praeter alias quasdam, ſequenti etiam methodo ad Logarithmos poteſt reduci. Ponatur $x^m+y=u$, obtinetur hac ſubſtitutione $udx+mx^{m-1}dx=du$; ſtatuatur $u+mx^{m-1}=t$, eruitur hac ſubrogatione $tdx+m.\overline{m-1}.x^{m-2}dx=dt$; ſumatur $t+m.\overline{m-1}\,x^{m-2}=z$, deducitur ex hoc valore $zdx+m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.x^{m-3}dx=dz$; igitur, ex conditione ipſius $m$, abibit calculus tandem, continuata ſimili ſubſtitutione, ad aequationem talem, $Zdx+ndx=dZ$, vbi $n=m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}.\overline{m-4}$ etc. quia exponens ipſius $x$, qui hic eſt $m-3$, alicubi debet euaneſcere.

neſcere. Ex hac vltima aequatione vero deriuatur $dx = \frac{dZ}{Z+n}$, quae integrata haec eſt, $x = l(Z+n)$, vel, poſito $le = 1$, erit $xle = l(Z+n)$, aut vero $e^x = Z+n$.

§. 18. Ex hoc artificio aperitur campus varias aequationes, difficiles alias apparituras, ad logarithmos reducendi, quem vnico exemplo commonſtrabo: ſit $dx + dy = (bdx + 2cxdx + 3ex^2dx + gdy + 2hydy + 3ky^2dy) : (a + bx + cx^2 + ex^3 + f + gy + hy^2 + ky^3)$, quod eſt differentiale Logarithmicus, cuius nempe numerator eſt differentiale nominatoris in hac fractione, ita vt integrale huius aequationis ſit $x + y = \log.(a + bx + cx^2 + ex^3 + f + gy + hy^2 + ky^3)$; multiplicetur $dx + dy$ per nominatorem fractionis, reſultabit exinde ſequens aequatio, ad logarithmos reducenda: $(a+f-b)dx + (b-2c)xdx + (c-3e)x^2dx + ex^3dx + gydx + hy^2dx + ky^3dx + (a+f-g)dy + bxdy + cx^2dy + ex^3dy + (g-2h)ydy + (h-3k)y^2dy + ky^3dy = 0$, quod paradigma ipſum iam ad caſus plurimos integrandos, ſine praeuia indeterminatorum ſeparatione inſeruire poteſt. Sit ex. gr. hoc modo integrandum $3ydx - 5y^3dx - 3dy + 3ydy + 15y^2dy - 5y^3dy = 0$. Obſeruabitur ex comparatione terminorum homogeneorum, eſſe $g = 3$, $k = -5$, $f = -a$, $h = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $e = 0$, et quaeſitum integrale erit hoc, $x + y = \log(3y - 5y^3)$.

§. 20. Debeat ex. gr. integrari $dx + 2y\,dy + 3y\,dx - 4x\,dy = 0$; atque erit, in applicatione ad priora generalia, $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $e = 2$, $f = 3$, $g = -4$, $fg - ce = -12$, ac proinde $\alpha = -\frac{1}{4}$, $\beta = -\frac{1}{6}$, $\delta = -\frac{1}{6}$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $\eta = 0$, $\theta = \frac{1}{3}$, $\alpha + \varepsilon = \frac{1}{12}$. Iam vero ſi occurrat $\eta = 0$, erit per aequationem ſuperiorem (A), ſine vlteriori reductione, ſtatim $\frac{du}{u} = -\frac{-\alpha\,d\zeta}{\alpha + \varepsilon\zeta - \beta}$, adeoque $u = \frac{D}{(\zeta - \frac{\beta}{\alpha + \varepsilon})^{\frac{\alpha}{\alpha + \varepsilon}}}$, poſita conſtante aliqua arbitraria $= D$. In hoc itaque exemplo habebitur $u = D(\zeta + 2)^3$, et ſubſtitutis valoribus legitimis orietur aequatio integrata ſequens; $1 + 3y^4 = D(8y - 4x + 2)^3$; quae logarithmice differentiata commodiſſime reſtituet differentiale propoſitum.

§ 21. Aequationes differentio-differentiales et differentiales commode aliquando aut integrantur, aut reducuntur ad differentiales, methodis duabus ſequentibus. *Prima* mihi vocatur *ſuppoſitio ſe confirmans*, cum nempe aequationem finitam aliquam ſuppono, atque hanc cum data aequatione integranda combino, et legitimis deductionibus eandem ſuppoſitam iterum eruo, ſeſe ita confirmantem. Huius calculi exemplum aliquod hoc eſto. Sit aequatio ſequens, $\overline{m-1}.\,my^2dx^2 = nx^2y\,ddy + \overline{n-1}.\,nx^2dy^2$, in qua $dx$ conſtans; et ſupponatur aequatio finita haec, $ax^m = by^n$, per quam prior multiplicetur,

artificio *Ioh. Bernoullii*, vid. *Commentar. Acad. ſcient. Imp. Petrop. tom.* I, *p.* 169, variabiles, hic inter ſe permixtas, tenet ſeparabiles; quam methodum magis adhuc vniuerſalem reddidit *Illuſtr. Dom. Goldbach*, *l. c. p.* 207. Quod cum primo intuitu non appareret, tentaui ab initio $a + cx + fy = u^m$, $b + ey + gx = t^n u^r$, et deprehendi tum demum, homogeneitatem aequationi propoſitae conciliari poſſe, ſi fiant $m = 1$, $n = 1$, $r = 0$. In hac itaque aequatione homogenea ſubſtituatur $\zeta u$ pro $t$, et facta diuiſione per $u$ obtinebitur,

$$(A)\quad \frac{du}{u} = \frac{\eta\zeta d\zeta - \alpha d\zeta}{-\eta\zeta^2 + \overline{\alpha + \varepsilon}\,\zeta - \beta}.$$

Ponantur porro $\eta\zeta - \alpha = \upsilon$; $\varepsilon - \alpha = \lambda, = \frac{g-f}{fg-ce}$; $\alpha\varepsilon - \beta\eta = \mu = \frac{e}{fg-ce}$; et habebitur $\frac{du}{u} = \frac{\upsilon d\upsilon}{\mu + \lambda\upsilon - \upsilon^2}$. Vt iam demum appareat, quomodo poſterius hoc membrum a logarithmis dependeat, ponatur $\frac{\upsilon d\upsilon}{\mu + \lambda\upsilon - \upsilon^2} = \frac{C d\upsilon}{A + \upsilon} + \frac{E d\upsilon}{B - \upsilon}$, eruentur ſic, ex debita comparatione, $A = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\lambda^2 + \mu)} - \frac{1}{2}\lambda$; $B = \frac{\mu}{A}$; $C = \frac{-A}{A+B}$; $E = \frac{B}{A+B}$; atque erit ſic integrando, $lu = Cl(A + \upsilon) - El(B - u)$, et horum logarithmorum ſumendo quantitates abſolutas, denique

$$u = \frac{\overline{A + u}^{C}}{\overline{B - \upsilon}^{E}};$$

omiſſa adhuc adiicienda conſtante indeterminata.

nem aequatione expellatur. Hoc modo facillime integratur $ydx - xdy = a\surd(dx^2 + dy^2)$; ſi enim haec aequatio differentietur, poſito $dx$ conſtanti, oritur $dxdy - xddy - dxdy = \frac{adyddy}{\surd(adx^2 + dy^2)}$, vel, abiectis aequalibus $dxdy$; et facta diuiſione per $ddy$, talis, $-x\surd(dx^2 + dy^2) = ady$, quo deinde facile reducitur, et integratur, vt prodeat,

$$C - \surd(a^2 - x^2) = y.$$

---

---

---

PHYSICO

# PHYSICO-
# MATHEMATICA.

# DE
# COCHLEA ARCHIMEDIS.

## AVCTORE
## *LEON. EVLERO.*

Cochlea Archimedis cum ob inuentionis antiquitatem, tum ob eius frequentiſſimum vſum in aquis hauriendis, tantopere celebrata, atque in vulgus cognita, vt vix vllus Hydraulicarum Machinarum ſcriptor reperiatur, qui eius conſtructionem atque vtilitatem non abunde explicuerit. Quodſi vero ad cauſam ſpectemus, cur haec machina ad aquam eleuandam ſit apta, et quomodo eius actio ſecundum mechanica principia abſoluatur, apud vetuſtiores quidem auctores nihil plane inuenimus, quod rationem ſaltem probabilem in ſe contineat, recentiores vero hanc inueſtigationem vel prorſus praeterierunt, vel leuiter ſaltem ac minus accurate ſunt perſecuti. Ita quamuis haec machina ſit notiſſima, eiusque praxis frequentiſſima, tamen fateri cogimur, eius Theoriam maxime adhuc eſſe abſconditam, atque tam modum, quo aqua per eam eleuatur, quam vires ad eius actionem requiſitas etiam nunc fere penitus latere. Atque hoc eo magis mirum videri debet, cum non ſolum ceterae Machinae ab antiquitate ad nos transmiſſae, felici cum ſucceſſu ad leges mechanicas ſint reuocatae, ſed etiam ipſa ſcientia mechanica eousque exculta ſit, vt ad omnis generis machinas explicandas ſufficiens videatur. Quin

etiam a plerisque omne ſtudium, quod a Geometris ope Analyſeos ſublimioris in Mechanica vlterius excolenda conſumitur, ſubtile magis quam vtile cenſeri ſolet.

Verum ſi rationem cochleae Archimedis diligentius contemplemur, vulgaria mechanicae principia ei explicandae minime ſufficientia deprehendemus: propterea quod ea manifeſte ad Theoriam motus aquae per tubos mobiles pertineat quod argumentum a nemine fere adhuc eſt tractatum. Quod enim ad motum aquae in genere attinet, non dudum admodum eſt, ex quo is ſtudioſius inueſtigari atque ad principia mechanica inueſtigari eſt coeptus, de motu autem aquae per tubos mobiles vix quisquam reperitur, qui aliquid in medium attulerit, vel tantum cogitauerit. Quam obrem cum nunc quidem principia, quibus omnis aquae motus innititur, ſatis ſint euoluta, operam dabo, vt ea quoque ad motum aquae, quo per cochleam hanc Archimedis fertur, accommodem, indeque omnia phaenomena, quae in hoc motu conſideranda occurrant, clare ac diſtincte explanem. Quae igitur hac de re ſum meditatus, ſequentibus propoſitionibus ſum complexurus; et quoniam cochleae Archimedeae duplicis generis conſtrui ſolent, quarum alterae helices ſuas circa cylindrum, alterae vero circa conum habent circumuolutas, a cochlea cylindrica exordiar; eiusque Theoria ſtabilita ad cochleas quoque conicas perſcrutandas non difficulter progredi licebit.

PRO-

## PROBLEMA I.

1. Dato motu, quo cylindrus circumagitur, et aquae celeritate per cochleam ſeu helicem cylindro circumductam, determinare verum cuiusque aquae particulae motum, hoc eſt eum motum, qui ex motu gyratorio cylindri et motu aquae progreſſiuo per helicem componitur.

## SOLVTIO.

Sit circulus ACB baſis cylindri, cuius ſuperficiei helix eſt circumducta, recta CD ad baſin in centro C perpendicularis axis cylindri, circa quem cylindrus cum helice in gyrum agitur. Ponatur baſis ſemidiameter $CA = CB = a$, et ſit EZ portio helicis in ſuperficie cylindri, quae cum peripheria baſis faciat angulum $ZEY = \zeta$; et a puncto helicis quocunque Z ad baſin ducatur axi parallela ZY; voceturque arcus $EY = s$, eſt $YZ = s \text{ tang.} \zeta$, quae cum helice faciet angulum $EZY = 90^\circ - \zeta$; et longitudo helicis erit $EZ = \frac{s}{\cos.\zeta}$.

Iam aquae per helicem transfluentis celeritas ſit debita altitudini $v$; helicem enim EZ vbique eiusdem amplitudinis aſſumo, ita vt eodem temporis inſtanti omnis aquae in helice contentae eadem ſit celeritas $= \sqrt{v}$. Deinde quia tota helix circa axem CD gyratur, ſit puncti E celeritas gyratoria circa punctum C debita altitudini $u$. Recta autem AB ſit fixa, quae ſcilicet non cum cylindro moueatur: atque initio quidem punctum E fuerit in A, inde autem tempore elapſo $= t$ motu angulari peruenerit in E, ſitque arcus $AE = p$, erit ob motum angularem $dp = dt\sqrt{u}$.

Nunc conſideretur primo motus aquae per helicem quaſi quieſcentem, ac celeritas particulae aquae in $Z$ erit $= \sqrt{v}$ eiusque directio erit $Zz$, qui motus reſoluatur in duos, quorum alterius directio ſit ſecundum $YZ$, alterius ſecundum $Zv$ ſeu $Yy$, atque celeritas ſecundum $YZ$ erit $= \sqrt{v}$, ſin $\zeta$ celeritas vero ſecundum $Zv$ ſeu $Yy$ erit $= \sqrt{v}.\ \text{coſ}.\ \zeta$.

Ad hunc poſteriorem motum adiungi nunc debet motus gyratorius, quippe qui in eandem directionem tendit, ex quo prodit tota celeritas puncti $Z$ ſecundum directionem $Yy = \sqrt{u} + \sqrt{v}.\ \text{coſ}.\ \zeta$.

Quoniam vero directio $Yy$ eſt variabilis, reducatur ea ad directiones conſtantes; quem infinem ex $Y$ ad rectam fixam $AB$ ducatur perpendicularis $YX$, ac vocentur tres coordinatae locum puncti $Z$ determinantes $CX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, erit primo $z = s$ tang. $\zeta$; tum vero ob arcum $AY = p + s$, et angulum $ACY \frac{p+s}{a}$, erit $CX = x = a\,\text{coſ}\,\frac{p+s}{a}$ et $XY = y = a$ ſin $\frac{p+s}{a}$. Tum ducta $Yu$ rectae $AB$ parallela erit angulus $Yyu = \frac{p+s}{a}$. Hinc motus ſecundum $Yy$ reſoluetur in binos alios, alterum ſecundum $Yu$ ſeu $AC$ cuius celeritas $= (\sqrt{u} + \sqrt{v}\,\text{coſ}.\,\zeta)$ ſin. $\frac{p+s}{a}$, alterum vero ſecundum $XY$ cuius celeritas $= (\sqrt{u} + \sqrt{v}\,\text{coſ}.\,\zeta)\,\text{coſ}.\,\frac{p+s}{a}$; celeritate ſecundum $YZ$ exiſtente $= \sqrt{v}.\,\text{ſin}.\,\zeta$.

Quare loco puncti $Z$ ad ternas coordinatas fixas reducto, quae ſunt:

$$CX = x = a\,\text{coſ}.\,\frac{p+s}{a},\quad XY = y = a\,\text{ſin}.\,\frac{p+s}{a},\quad \text{et } YZ = s\,\text{tang}.\,\zeta$$

vero

verus particulae in Z verſantis motus pariter ſecundum has ternas directiones fixas reſoluetur, eritque

Celeritas motus ſecundum $CX = -(\sqrt{u} + \sqrt{v} \operatorname{coſ.} \zeta) \operatorname{ſin.} \frac{p+s}{a}$
Celeritas motus ſecundum $XY = +(\sqrt{u} + \sqrt{v} \operatorname{coſ.} \zeta) \operatorname{coſ.} \frac{p+s}{a}$
Celeritas motus ſecundum $YZ = \sqrt{v}. \operatorname{ſin.} \zeta.$

## COROLL. 1.

2. Hinc iam facile reperitur vera celeritas particulae aquae in Z verſantis, cum enim hae ternae directiones ſint inter ſe normales, erit vera celeritas aequalis radici quadratae ex ſumma quadratorum harum trium celeritatum, ex quo vera celeritas erit $= \sqrt{(u + v + 2\sqrt{uv}. \operatorname{coſ.} \zeta)}$.

## COROLL. 2.

3. Cum particula aquae in Z tempuſculo $dt$ perueniat in helicis punctum $z$, exiſtente $Zz = \frac{ds}{\operatorname{coſ.} \zeta}$, et $Yy\, Zv = ds$, celeritas autem in helice ſit $= \sqrt{v}$, erit $Zz\, \frac{ds}{\operatorname{coſ.} \zeta} = dt \sqrt{v}$, vnde fit $ds = dt \sqrt{v}. \operatorname{coſ.} \zeta$; praeterea vero iam vidimus eſſe $dp = dt \sqrt{u}$.

## COROLL. 3.

4. Celeritates quoque particulae aquae Z ſecundum ternas directiones fixas exprimentur per differentialia coordinatarum $x$, $y$, $z$ ad elementum temporis $dt$ applicatas;
Erit ſcilicet ex natura reſolutionis motus:

Celeritas ſecundum $CX = \frac{dx}{dt} = -(\sqrt{u} + \sqrt{v}. \operatorname{coſ.} \zeta) \operatorname{ſin.} \frac{p+s}{a}$
Celeritas ſecundum $XY = \frac{dy}{dt} = (\sqrt{u} + \sqrt{v}. \operatorname{coſ.} \zeta) \operatorname{coſ.} \frac{p+s}{a}$
Celeritas ſecundum $YZ = \frac{dz}{dt} = \sqrt{v} \quad \operatorname{ſin.} \zeta.$

Quai-

Quarum formularum identitas intelligitur ex valoribus differentialibus $dp = dt\sqrt{u}$ et $ds = dt\sqrt{v}.\,\text{coſ.}\,\zeta$.

PROBLEMA. 2.

5. Datis tam celeritate, qua aqua per helicem promouetur, quam celeritate, qua cylindrus cum helice circa axem CD in gyrum agitur, inuenire vires, quibus quamque aquae particulam Z ſollicitari oportet, vt hunc motum proſequi queat.

SOLVTIO.

Sit celeritas qua aqua praeſenti temporis momento per helicem EZ promouetur $= \sqrt{v}$, celeritas autem gyratoria cylindri $= \sqrt{u}$. Tum initium helicis iam ſit in E vt ſit $AE = p$, et particula aquae, quam conſideramus, in Z, vt ducta ZY axi CD parallela, ſit arcus $EY = s$, exiſtente angulo helicis $YEZ = \zeta$. Porro locus puncti Z reducatur ad ternas coordinatas fixas $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$; erit vti vidimus:

$$x = a\,\text{coſ.}\,\frac{p+s}{a};\; y = a\,\text{ſin.}\,\frac{p+s}{a} \text{ et } z = s\,\text{tang}\,\zeta$$

denotante $a$ ſemidiametrum $CA = CB$ baſis cylindri. Poſito vero elemento temporis $= dt$, vt ſit $dp = dt\sqrt{u}$ et $ds = dt\sqrt{v}.\,\text{coſ.}\,\zeta$, ſumtoque hoc differentiali $dt$ conſtanti, ex principiis mechanicis conſtat, particulam aquae in Z a tribus viribus acceleratricibus vrgeri debere, quae ſint:

ſecundum directionem $CX = \frac{2ddx}{dt^2}$

ſecundum directionem $XY = \frac{2ddy}{dt^2}$

ſecundum directionem $YZ = \frac{2ddz}{dt^2}$.

Verum

Verum cum ex ſupra oſtenſis ſit

$$\frac{dx}{dt} = -(\sqrt{u} + \sqrt{v}\ \cos.\ \zeta)\ \sin.\ \frac{p+s}{a}$$

$$\frac{dy}{dt} = (\sqrt{u} + \sqrt{v}\ \cos.\ \zeta)\ \cos.\ \frac{(p+s)}{a}$$

et $-\frac{dz}{dt} = \sqrt{v}\ \sin.\ \zeta$

erit denuo differentiando

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\left(\frac{du}{2dt\sqrt{u}} + \frac{dv\cos.\zeta}{2dt\sqrt{v}}\right)\sin.\frac{p+s}{a} - \frac{1}{a}(\sqrt{u}+\sqrt{v}\cos.\ \zeta)^2\cos.\ \frac{p+s}{a}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} = \left(\frac{du}{2dt\sqrt{u}} + \frac{dv\cos.\zeta}{2dt\sqrt{v}}\right)\cos.\frac{p+s}{a} - \frac{1}{a}(\sqrt{u}+\sqrt{v}\cos.\zeta)^2\sin.\frac{p+s}{a'}$$

$$\frac{ddz}{dt\,2} = \frac{dv}{2dt\sqrt{v}}\ \sin.\ \zeta$$

Tres ergo vires acceleratrices quaeſitae ſunt

I. ſec. $CX = -\frac{1}{dt}\left(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv\cos.\zeta}{\sqrt{v}}\right)\sin.\frac{p+s}{a} - \frac{2}{a}(\sqrt{u}+\sqrt{v}\cos.\zeta)^2\cos.\frac{p+s}{a}$

II. ſec. $XY = +\frac{1}{dt}\left(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv\cos.\zeta}{\sqrt{v}}\right)\cos.\frac{p+s}{a} - \frac{2}{a}(\sqrt{u}+\sqrt{v}\cos.\zeta)^2\sin.\frac{p+s}{a}$

III ſec. $YZ = \frac{dv}{dt\sqrt{u}}\ \sin.\ \zeta.$

## COROLL. I.

6. Transferantur duae priores vires primum in punctum Y, ita vt hoc punctum a duabus viribus acceleratricibus vrgeatur, ſecundum directiones YM et YN, qae ſunt Tab. II. Fig. 2.

Vis ſec. $YM = -\frac{1}{dt}\left(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv\cos.\zeta}{\sqrt{v}}\right)\sin.\frac{p+s}{a} - \frac{2}{a}(\sqrt{u}+\sqrt{v}\cos.\zeta)^2\cos.\frac{p+s}{a}$

Vis ſec. $YN = +\frac{1}{dt}\left(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv\cos.\zeta}{\sqrt{v}}\right)\cos.\frac{p+s}{a} - \frac{2}{a}(\sqrt{u}+\sqrt{v}\cos.\zeta)^2\sin.\frac{p+s}{a}$

## COROLL. 2.

7. Nunc hae duae vires in duas alias transformari poterunt, quae agant ſecundum directiones $Yy$, et YO, quarum haec ſit ad ſuperficiem cylindri normalis: atque ob angulnm $MYO\ ACY = \frac{p+s}{a}$, ex his duabus viribus reſultabit

I Vis ſecundum $Yy$ = Vis $YN$ coſ. $\frac{p+s}{a}$ − Vis $YM$ ſin. $\frac{p+s}{a}$

II Vis ſecundum $YO$ = Vis $YN$ ſin. $\frac{p+s}{a}$ + Vis $YM$ coſ. $\frac{p+s}{a}$

## COROLL. 3.

8. Hinc ergo loco duarum virium, quae ſollicitabant ſecundum directiones $CX$ et $XY$, vel $YM$ et $YN$, in calculum introducentur duae hae aliae ſecundum directiones $Yy$ et $YO$, quae erunt

Vis ſecundum $Yy = + \frac{r}{dt}\left(\frac{du}{\sqrt{v}} + \frac{dv \, coſ. \zeta}{\sqrt{v}}\right)$

Vis ſecundum $YO = - \frac{z}{a}(\sqrt{u} + \sqrt{v} \, coſ. \zeta)^2$

ſicque angulus $p + s$ non amplius in calculo reperitur.

## PROBLEMA. 3.

9. Tres vires ante inuentas ad tres alias reducere, quarum vna ſit ſecundum directionem helicis $Zz$ directa, duae reliquae vero ſint ad ipſam helicem normales.

## SOLUTIO.

Tab. II. Fig. 3. Sit $Zz$ elementum helicis, vbi nunc particula aquae, quae vires inuentas ſuſtinet, verſatur: ſitque $Z\sigma$ non ſolum ad helicem $Zz$, ſed etiam ad ipſius cylindri ſuperficiem in $Z$ normalis, deinde ſit recta $Zr$ in ipſa ſuperficie cylindri ſita, atque ad $Zz$ normalis. Tres igitur vires inuentae ad tres alias reduci debent, quae particulam aquae ſollicitent ſecundum directiones $Zz$, $Z\sigma$ et $Zr$. Ac primo quidem vis inuenta ſecundum $YZ$ agens $= \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ ſin. $\zeta$, ob angulum helicis $YEZ = \zeta$, dabit

I vim

I vim ſecundum $Zr = -\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ ſin. $\zeta$ coſ. $\zeta$

II vim ſecundum $Zz = +\frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ ſin. $\zeta$ ſin. $\zeta$

Deinde vis, quae ſecundum directionem $Yy$ ſeu $Zs$ agere inuenta eſt $= \frac{1}{dt}\left(\frac{du}{\sqrt{u}} + \frac{dv\,\text{coſ.}\,\zeta}{\sqrt{v}}\right)$, dabit vires

I ſecundum $Zz = \frac{du}{dt\sqrt{u}}$ coſ. $\zeta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ coſ. $\zeta^2$

II ſecundum $Zr = \frac{du}{dt\sqrt{u}}$ ſin. $\zeta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ ſin. $\zeta$ coſ $\zeta$

Tertio vis, quae ſecundum directionem $YO$ agere eſt inuenta, dabit nunc ſola

vim ſecundum $Zo = -\frac{2}{a}(\sqrt{u} + \sqrt{v}.\,\text{coſ.}\,\zeta)^2$

Quare tres vires acceleratrices, quibus particula aquae in $Z$ ſollicitari debet, vt motum propoſitum perſequatur, erunt:

I ſecundum directionem $Zz = \frac{du}{dt\sqrt{u}}$ coſ. $\zeta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$,

II ſecundum directionem $Zr = \frac{du}{dt\sqrt{u}}$ ſin. $\zeta$

III ſecundum directionem $Zo = -\frac{2}{a}(\sqrt{u} + \sqrt{v}\,\text{coſ.}\,\zeta)^2$

## SCHOLION.

10. Habemus ergo vires, quibus ſingulae aquae particulae ſollicitatae eſſe debent, vt motus, quem aſſumſimus, ſubſiſtere poſſit. Iſtas autem vires hic ideo ad tres directiones $Zz$, $Zr$, et $Zo$ reuocaui, quo facilius cum viribus, quibus aqua in tubo actu ſollicitatur, comparari poſſint; vt enim quantitates $v$ et $u$ verum aquae et cylindri motum exhibeant, neceſſe eſt, vt tres illae vires inuentae conueniant cum viribus, quibus aqua reuera vrgetur. Hae autem vires ſunt primo ſtatus compreſſionis aquae in tubo, deinde appreſſio aquae ad

latera tubi, quae ſecundum ambas directiones $Zr$ et $Zo$ ad directionem tubi normales exhiberi ſolet. Tertio vero grauitas, qua ſingulae aquae particulae deorſum nituntur, imprimis examini eſt ſubiicienda, quod ſequenti problemate inſtituemus.

## PROBLEMA 4.

11. Si cylindrus fuerit vtcunque ad horizontem inclinatus, definire vires ſecundum ternas praedictas directiones, quibus ſingulae aquae particulae Z in helice ob grauitatem ſollicitantur.

## SOLUTIO.

Tab. II. Fig. 4. Exprimat angulus $\theta$ inclinationem baſis cylindri ad horizontem, ſitque in plano baſis punctum fixum A ſummum, punctum B vero imum, ita vt recta AB cum axe cylindri CD in plano verticali ſit conſtituta. In hoc plano per centrum baſis C ducatur horizontalis CH, eritque angulus $ACH = \theta$, ſeu ſi ex puncto B erigatur recta verticalis BG axem in G interſecans, erit quoque angulus $BGC = \theta$, atque ob grauitatem ſingulae aquae particulae ſollicitabuntur deorſum ſecundum directiones ipſi GB parallelas, et vis acceleratrix haec vbique erit $= 1$. Fig. 1. Iam in prima figura ducatur quoque recta BG cum axe CD conſtituens angulum $BGC = \theta$, ac particula aquae in Z vrgebitur vi acceleratrice $= 1$ ſecundum directionem rectae BG parallelam. Reſoluatur haec vis ſecundum directiones GC et CB, prodibitque

Vis

Vis ſecundum $GC = 1 \cos. \theta$, et vis ſecundum $CB = 1 \sin. \theta$. Ex priori habebimus pro particula aquae $Z$ vim ſecundum $ZY = \cos. \theta$, ex poſteriori vero vim ſecundum $YM = -\sin. \theta$, vnde ob angulum $MYO = \frac{p+s}{a}$, oritur vis ſecundum $YO = -\sin. \theta \cos. \frac{p+s}{a}$ et vim ſecundum $Yy = + \sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a}$. Hinc ergo punctum $Z$ ſollicitabitur ab his tribus viribus acceleratricibus: Tab. II. Fig. 2. Fig. 3.

I ſecundum directionem $ZY$ vi $= \cos. \theta$

II ſecundum directionem $Zo$ vi $= -\sin. \theta \cos. \frac{p+s}{a}$

III ſecundum directionem $Zv$ vi $= +\sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a}$

Ex his porro ob angulum $zZv = \zeta$ orientur:

Primo vis ſecundum $Zz =$ vi $Zv \cos. \zeta -$ vi $ZY \sin. \zeta$.

Tum vis ſecundum $Zr =$ vi $Zv \sin. \zeta +$ vi $ZY \cos. \zeta$

Quare pro tribus directionibus $Zz$, $Zr$ et $Zo$ obtinebimus ſeqnentes vires acceleratrices ex grauitate oriundas:

I Vim ſecundum $Zz = \cos. \zeta \sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a} - \sin \zeta \cos. \theta$

II Vim ſecundum $Zr = \sin. \zeta \sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a} + \cos. \zeta \cos. \theta$

III Vim ſecundum $Zo = -\sin. \theta \cos. \frac{p+s}{a}$.

## PROBLEMA 5.

12. Dato, vt hactenus, tam cylindri, quam aquae per helicem motu, definire ſtatum compreſſionis aquae in ſingulis helicis punctis. Fig. 3.

## SOLVTIO.

Praeſenti temporis inſtanti, quo initium helicis eſt in E, exiſtente arcu $AE = p$, conſideremus helicis punctum Z, vt ſit $EY = s$, et $YZ = s \tang \zeta$ exiſtente helicis angulo $YEZ = \zeta$, ſitque ſtatus compreſſionis aquae in puncto $Z = q$, ſeu denotet $q$ profunditatem, ad quam aqua quieſcens in pari ſtatu compreſſionis exiſtat, eritque pro hoc momento $q$ functio quaepiam ipſius $s$, et in puncto proximo $z$, exiſtente $Yy = ds$, ſtatus compreſſionis erit $= q + dq$. Sit iam amplitudo helicis $= bb$, erit particula aquae in portiuncula $Zz$ contenta $= \frac{bbds}{\cos. \zeta}$; quae ergo in Z propelletur vi motrice $= bbq$, in $z$ vero repelletur vi $= bb(q + dq)$; vnde exiſtit vis motrix repellens, ſeu ſecundum $zZ$ vrgens $= bbdq$, quae praebet vim acceleratricem $= \frac{dq \cos. \zeta}{ds}$. Quare ob ſtatum compreſſionis particula aquae in elemento helicis $Zz$ contenta ſecundum directionem $Zz$ ſollicitabitur vi acceleratrice $= -\frac{dq \cos. \zeta}{ds}$. Praeterea vero ob grauitatem eadem particula, vti vidimus, ſollicitatur ſecundum $Zz$ vi acceleratrice $= \cos. \zeta \sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a} - \sin \zeta \cos. \theta$, vnde coniunctim tam ob grauitatem, quam ob ſtatum compreſſionis aquae, particula aquae in helicis puncto Z contenta vrgebitur ſecundum directionem $Zz$ vi acceleratrice, quae erit

$$\cos. \zeta \sin. \theta \sin. \frac{p+s}{a} - \sin. \zeta \cos. \theta - \frac{dq \cos. \zeta}{ds}$$

haec-

haecque eſt vis, qua iſta particula actu vrgetur, ſecundum directionem $Zz$; ex quo neceſſe eſt, vt ea aequalis ſit illi vi, qua ſupra punctum $Z$ ad motus conſeruationem ſollicitari debere inuenimus, ſecundum eandem directionem $Zz$. Quae cum ſit inuenta $= \frac{du}{dt\sqrt{u}}$ coſ. $\zeta + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$ habebimus hanc aequationem:

$dq$ coſ. $\zeta = ds$ coſ. $\zeta$ ſin. $\theta$ ſin. $\frac{p+s}{a} - ds$ ſin. $\zeta$ coſ. $\theta - \frac{du}{dt\sqrt{u}} ds$ coſ. $\zeta$ $- \frac{dv}{dt\sqrt{u}} ds$, vbi, quoniam ad praeſens tantum temporis momentum reſpicimus, quantitates a tempore $t$ pendentes, quae ſunt $p$, $u$, $v$, itemque $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$, tanquam conſtantes ſunt ſpectandae, ex quo integratione inſtituta habebimus $q$ coſ. $\zeta = C - a$ coſ. $\zeta$ ſin. $\theta$ coſ. $\frac{p+s}{c} - s$ ſin. $\zeta$ coſ. $\theta - \frac{s\,du\,\text{coſ.}\,\zeta}{dt\sqrt{v}} - \frac{s\,dv}{ds\sqrt{v}}$ vnde ſtatus compreſſionis aquae in ſingulis helicis punctis pro praeſenti temporis momento innoteſcit.

## PROBLEMA 6.

13. Si data aquae portio in helice reperiatur, atque cylindrus datam ad horizontem inclinationem tenens motu quocunque in gyrum agatur, inuenire motum quo iſta aquae portio per helicem promouebitur.

## SOLVTIO.

Sit baſis cylindri ſemidiameter $CA = CB = a$, et Tab. II
angulus, quem helix $EF$ cum baſi cylindri conſtituit Fig. 5
$BEF = \zeta$. Axis autem cylindri $PQ$ cum recta verticali $QR$ conſtituat angulum $PQR = \theta$, quo eodem angulo

gulo baſis cylindri ad horizontem erit inclinata. In baſi autem ſit A punctum ſummum et B infimum. Praeſenti autem temporis momento ſit initium helicis in E, exiſtente eius a puncto ſummo interuallo ſeu arcu $AE = p$: et cylindrus in plagam AEB gyretur, ita vt puncti E celeritas ſit $= \sqrt{u}$, erit $dp = dt\sqrt{u}$. Occupet nunc portio aquae in helice contenta ſpatium MN, cuius longitudo ſit $MN = f$, ac ductis axi parallelis MS et NT ſit aquae ab initio helicis diſtantia $EM = x$, erit $EN = x + f$, et $ES = x \operatorname{coſ.} \zeta$, atque $ET = (x+f) \operatorname{coſ.} \zeta$; celeritas vero, qua haec aquae portio praeſenti momento per helicem promouetur, ſit $= \sqrt{v}$. His poſitis, ſi in portione aquae MN punctum quodpiam medium Z conſideretur, et arcus EY ponatur $= s$, erit ſtatus compreſſionis aquae in Z, qui per altitudinem $q$ exprimatur, vti in problemate praecedente eſt erutus:

$$q \operatorname{coſ.} \zeta = C - a \operatorname{coſ.} \zeta \operatorname{ſin} \theta \operatorname{coſ.} \frac{p+s}{a} - s \operatorname{ſin.} \zeta \operatorname{coſ.} \theta - \frac{s\,du \operatorname{coſ.} \zeta}{dt\sqrt{u}} - \frac{s\,dv}{dt\sqrt{v}}$$

Iam vero conſtat in vtroque termino M et N ſtatum compreſſionis euaneſcere debere; ſiue ergo ponatur $s = x \operatorname{coſ.} \zeta$ ſiue $s = (x+f) \operatorname{coſ.} \zeta$, fieri debet $q = 0$: vnde duplex naſcitur aequatio

$$0 = C - a \operatorname{coſ.} \zeta \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{coſ.} \frac{p + x \operatorname{coſ.} \zeta}{a} - x \operatorname{ſin.} \zeta \operatorname{coſ.} \zeta \operatorname{coſ.} \theta - x \operatorname{coſ.} \zeta \left(\frac{du \operatorname{coſ.} \zeta}{dt\sqrt{u}} + \frac{dv}{dt\sqrt{u}}\right)$$

$$0 = C - a \operatorname{coſ.} \zeta \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{coſ.} \frac{p + (x+f) \operatorname{coſ.} \zeta}{a} - (x+f) \operatorname{coſ.} \zeta \left(\operatorname{ſin.} \zeta \operatorname{coſ.} \theta + \frac{du \operatorname{coſ} \zeta}{dt\sqrt{u}} + \frac{dv}{dt\sqrt{v}}\right)$$

vnde, conſtantem C eliminando, obtinebitur, diuidendo per $\operatorname{coſ.} \zeta$, haec aequatio.

a ſin.

$$a\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\frac{p+x\,\text{coſ.}\,\zeta}{a} = a\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\frac{p+(x+f)\,\text{coſ.}\,\zeta}{a} + f\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta + \frac{f\,du\,\text{coſ.}\,\zeta}{dt\sqrt{u}} + \frac{f\,dv}{dt\sqrt{v}}$$

vnde motus aquae per helicem definiri debet, vti enim eſt $dp = dt\sqrt{u}$, ita erit $dx = dt\sqrt{v}$.

Multiplicetur ergo haec aequatio per $dp + dx\,\text{coſ.}\,\zeta = dt\sqrt{u} + dt\,\text{coſ.}\,\zeta.\sqrt{v}$, eritque integrando

$$a^2\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\frac{p+x\,\text{coſ.}\,\zeta}{a} = a^2\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\frac{p+(x+f)\,\text{coſ.}\,\zeta}{a} + f(p+x\,\text{coſ.}\,\zeta)\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta + f\int\left(\frac{du\,\text{coſ.}\,\zeta}{\sqrt{u}} + \frac{dv}{\sqrt{v}}\right)(\sqrt{u} + \text{coſ.}\,\zeta.\sqrt{v})$$

## COROLL. 1.

14. Si igitur motus gyrationis cylindri fuerit vniformis, ſeu $u$ conſtans, ponatur $u = k$, ob $du = 0$ erit

$$a^2\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\frac{p+x\,\text{coſ.}\,\zeta}{a} = a^2\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\frac{p+(x+f)\,\text{coſ.}\,\zeta}{a} + f(p+x\,\text{coſ.}\,\zeta)\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta + 2f\sqrt{kv} + fv\,\text{coſ.}\,\zeta + \text{Conſt.}$$

Vbi eſt $p = t\sqrt{k}$, ita vt haec aequatio ob $\sqrt{v} = \frac{dx}{dt}$ duas tantum variabiles $t$ et $x$ inuoluat. Conſtans autem ex ſtatu initiali debet definiri.

## COROLL. 2.

15. Si portio aquae in tubo MN fuerit infinite parua ſeu $f = 0$, erit $\text{ſin.}\frac{p+(x+f)\,\text{coſ.}\,\zeta}{a} = \text{ſin.}\frac{p+x\,\text{coſ.}\,\zeta}{a} + \frac{f\,\text{coſ.}\,\zeta}{a}\,\text{coſ.}\frac{p+x\,\text{coſ.}\,\zeta}{a}$

hoc ergo caſu motus definietur hac aequatione:

$\text{Conſt.} = a\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\frac{p+x\,\text{coſ.}\,\zeta}{a} + (p+x\,\text{coſ.}\,\zeta)\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta + 2\sqrt{kv} + v\,\text{coſ.}\,\zeta$. Quodſi ergo haec particula initio quieuerit in E, punctumque E fuerit in A, ita vt poſito $x = 0$, ſit $p = 0$ et $v = 0$ erit $a\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\left(1 - \text{coſ.}\frac{p+x\,\text{coſ.}\,\zeta}{a}\right) = (p+x\,\text{coſ.}\,\zeta)\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta + 2\sqrt{kv} + v\,\text{coſ.}\,\zeta$.

## COROLL. 3.

16. Si in caſu corollarii praecedentis ponatur angulus $\frac{p+x\,\text{coſ.}\,\zeta}{a}=\Phi$, vt fit $dt=\frac{a\,d\Phi}{\surd k+\text{coſ.}\,\zeta\surd v}$, ob $dp=dt\surd k$ et $dx=dt\surd v$, relatio inter $\Phi$ et $v$ hac exprimetur aequatione:

$$a\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta(1-\text{coſ.}\,\Phi)=a\Phi\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta+2\surd kv+v\,\text{coſ.}\,\zeta$$

ex qua fit $\surd k+\text{coſ.}\,\zeta,\ \surd v=\surd(k-a\Phi\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta$
$+a\,\text{coſ}\,\zeta^2\,\text{ſin}\,\theta(1-\text{coſ}\,\Phi))$

ideoque $\quad dt=\frac{a\,d\Phi}{\surd(k-a\Phi\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta+a\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta(1-\text{coſ.}\,\Phi))}$

## COROLL. 4.

17. Simili modo ſi generaliter, poſito tamen motu gyratorio conſtante, ſeu $u=k$, ponatur $\frac{p+x\,\text{coſ.}\,\zeta}{a}=\Phi$ et $\frac{f\,\text{coſ.}\,\zeta}{a}=\gamma$, erit quoque $dt=\frac{a\,d\Phi}{\surd k+\text{coſ.}\,\zeta.\surd v}$ et $\frac{a\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta}{\gamma}\,\text{ſin.}\,\Phi$ $=\frac{a\,\text{coſ}\,\zeta\,\text{ſin}\,\theta}{\gamma}\,\text{ſin.}(\gamma+\Phi)+a\Phi\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta+2\surd kv+v\,\text{coſ.}\,\zeta\pm C.$ ideoque

$$\surd k+\text{coſ.}\,\zeta\surd v=\surd(C+\tfrac{a}{\gamma}\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta(\text{ſin.}\,\Phi-\text{ſin}(\gamma+\Phi))$$
$$-a\Phi\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta)$$

vnde fit

$$dt=\frac{a\,d\Phi}{\surd(C+\frac{a}{\gamma}\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta(\text{ſin.}\,\Phi-\text{ſin.}(\gamma+\Phi))-a\Phi\,\text{ſin}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta)}$$

vbi $\Phi$ denotat angulum ACS, et $\gamma$ angulum SCT, qui eſt conſtans.

## COROLL. 5.

18. Si cylindrus in partem contrariam celeritate $=\surd k$ circumagatur, pro $\surd k$ ſcribi debet $-\surd k$, arcusque $p$ negatiue erit accipiendus, ita vt ſit $\Phi=\frac{x\,\text{coſ.}\,\zeta-p}{a}$.

Quae

Quare cum ſit $p > \frac{x \operatorname{coſ}.\zeta}{a}$, etiam angulus $\Phi$ negatiue accipiatur, habebimus ergo pro hoc motu: $\Phi = \frac{p - x \operatorname{coſ}.\zeta}{a}$; et $dt = \frac{a\,d\Phi}{\sqrt{k} - \operatorname{coſ}.\zeta.\sqrt{v}}$ atque $\sqrt{k} - \operatorname{coſ}\zeta, \sqrt{v} = \sqrt{(C - \frac{a}{\gamma} \operatorname{coſ}.\zeta^2 \operatorname{ſin}.\theta (\operatorname{ſin}.\Phi - \operatorname{ſin}.(\Phi - \gamma)) + a\Phi \operatorname{ſin}.\zeta \operatorname{coſ}.\zeta \operatorname{coſ}\theta)}$.

## COROLL 6.

19. Si hoc caſu initio $t = 0$, quo erat $p = 0$, et $\sqrt{v} = 0$, fuerit $x = EM = g$; ideoque $\Phi = -\frac{g \operatorname{coſ}.\zeta}{a}$; ponamus hunc angulum initialem $ECS = \varepsilon$, vt fuerit initio $\Phi = -\varepsilon$, erit $\sqrt{k} - \operatorname{coſ}.\zeta.\sqrt{v} = \sqrt{(k + \frac{a}{\gamma} \operatorname{coſ}.\zeta^2 \operatorname{ſin}.\theta} \\ (\operatorname{ſin}.(\varepsilon + \gamma) - \operatorname{ſin}.\varepsilon - \operatorname{ſin}.\Phi + \operatorname{ſin}.(\Phi - \gamma)) + a(\varepsilon + \Phi) \operatorname{ſin}.\zeta \operatorname{coſ}.\zeta \operatorname{coſ}.\theta)$.

## PROBLEMA 7.

20. Si, dum cylindrus data celeritate vniformiter in plagam BEA gyratur, helici in C particula aquae ſeu globulus inſeratur, qui deinde a motu cylindri abripiatur, determinare motum globuli per helicem. Tab. II. Fig. 5.

## SOLVTIO.

Sit $\sqrt{k}$ celeritas, qua punctum cylindri E in gyrum agitur, in ſenſum EA; fueritque eo momento, quo globulus in orificium helicis E immittitur, angulus $ACE = \alpha$, et $t = 0$. Fieri autem nequit, vt celeritas globuli initialis ſit $= 0$; ſi enim celeritas eius reſpectu tubi ſecundum EM ponatur $= \sqrt{v}$, eius celeritas vera erit $= \sqrt{(k + v - 2 \operatorname{coſ}.\zeta.\sqrt{kv})}$, quae non poteſt euaneſcere. Ponamus ergo hanc celeritatem initio fuiſſe minimam, ac reperimus $\sqrt{v} = \operatorname{coſ}\zeta.\sqrt{k}$, ita vt celeritas vera fuerit $= \operatorname{ſin}.\zeta.\sqrt{k}$, cuius directio ad

EM erat normalis. Iam elapſo tempore $t$, ſit vt ſupra $AE = p$; globulus vero reperiatur in M exiſtente $EM = x$, cuius celeritas relatiue in tubo ſecundum MN ſit $= \sqrt{v}$, erit $dp = -dt\sqrt{k}$ et $dx = dt\sqrt{v}$: et per §. 15. motus definietur hac aequatione, ſumta ſcilicet celeritate $\sqrt{k}$ negatiua.

$$\text{Conſt} = a\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\frac{p + x\,\text{coſ.}\,\zeta}{a} + (p + x\,\text{coſ.}\,\zeta)\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ}\,\theta - 2\sqrt{kv} + v\,\text{coſ.}\,\zeta.$$

Conſtans autem ita eſt definienda, vt poſito $t = 0$, ſeu $\frac{p}{a} = \alpha$, fiat $x = 0$ et $\sqrt{v} = \text{coſ.}\,\zeta.\sqrt{k}$, ſicque erit

$$\text{Conſt} = a\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\alpha + \alpha a\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ}\,\theta - 2k\,\text{coſ.}\,\zeta + k\,\text{coſ.}\,\zeta^2$$

Ponatur angulus ACS $= \Phi$, erit $\Phi = \frac{p + x\,\text{coſ.}\,\zeta}{a}$ et $d\Phi = -\frac{dt\sqrt{k} + dt\,\text{coſ.}\,\zeta.\sqrt{v}}{a}$. Confecerit autem cylindrus motu angulari tempore $t$ angulum $= \omega$, in plagam BEA, erit $d\omega = \frac{dt\sqrt{k}}{a}$, et $\omega = \frac{t\sqrt{k}}{a}$, quem angulum loco temporis, tamquam eius menſuram in calculum introducamus, erit $\frac{p}{a} = \alpha - \omega$, $\Phi = \alpha - \omega + \frac{x\,\text{coſ.}\,\zeta}{a}$; et ob $dx = dt\sqrt{v} = \frac{a\,d\omega\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ habebimus $d\Phi = -d\omega + \frac{d\omega\,\text{coſ.}\,\zeta.\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ ſeu $d\omega = \frac{d\Phi\sqrt{k}}{-\sqrt{k} + \text{coſ.}\,\zeta.\sqrt{v}}$. Noſtra autem aequatio erit

$$a\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\alpha + \alpha a\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta - 2k\,\text{coſ.}\,\zeta + k\,\text{coſ.}\,\zeta^2 = a\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,\Phi + a\Phi\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta - 2\sqrt{kv} + v\,\text{coſ.}\,\zeta$$

ex qua obtinemus:

$$\text{coſ.}\,\zeta\sqrt{v} - \sqrt{k} = -\sqrt{(k\,\text{ſin.}\,\zeta^4 + a\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta(\text{coſ.}\,\alpha - \text{coſ.}\,\Phi) + a(\alpha - \Phi)\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta)}$$

vnde ad datum valorem ipſius $\Phi$ elicimus valorem ipſius $\sqrt{v}$, quo inuento erit

$$d\omega = \frac{-d\Phi\sqrt{k}}{\sqrt{(k\,\text{ſin.}\,\zeta^4 + a\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta\,(\text{coſ.}\,\alpha - \text{coſ.}\,\Phi) + a\,(\alpha - \Phi)\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta)}}$$

cuius integrale ita debet capi, vt poſito $\omega = 0$, fiat $\Phi = \alpha$.

$\Phi = \alpha$. Ex hac ergo aequatione integrali viciſſim ad datum tempus angulo $\omega$ expreſſum, reperitur angulus $\Phi$, ex eoque porro locus globuli in helice, ſeu portio $EM = x = \frac{a(\Phi - \alpha + \omega)}{coſ.\,\zeta}$, eiusque inſuper celeritas relatiua in helice $\sqrt{v}$ ſcilicet

$$\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k}}{coſ.\,\zeta} - \sqrt{(k\,ſin.\,\zeta^2\,tang.\,\zeta^2 + a\,ſin.\,\theta\,(coſ.\,\alpha - coſ.\,\Phi) + a\,(\alpha - \Phi)\,tang.\,\zeta\,coſ.\,\theta)}$$

## COROLL. 1.

21. Expreſſio $coſ.\,\zeta\,\sqrt{v} - \sqrt{k}$ deſignat celeritatem veram puncti S in baſi, quod globulo in M reſpondet. Cum enim globulus velocitate $\sqrt{v}$ in helice ſecundum MN progredi ponatur, erit eius celeritas angularis circa axem $= coſ.\,\zeta.\,\sqrt{v}$, reſpectu helicis; quia autem helix ipſa in plagam oppoſitam conuertitur celeritate $= \sqrt{k}$, erit vera globuli celeritas rotatoria, ſeu motus quo punctum S a ſummitate A recedit $= coſ.\,\zeta\,\sqrt{v} - \sqrt{k}$.

## COROLL. 2.

22. Ipſo autem motus initio, quo $\sqrt{v} = coſ.\,\zeta\,\sqrt{k}$; haec celeritas erat negatiua, ſcilicet $= (coſ.\,\zeta^2 - 1)\sqrt{k} = -ſin.\,\zeta^2\,\sqrt{k}$, ſtatim ergo ab initio etiam nunc erit negatiua: ſeu angulus $ACS = \Phi$ diminuetur, quae eſt ratio, cur calculus pro $coſ.\,\zeta\,\sqrt{v} - \sqrt{k}$ valorem praebuerit negatiuum

$$coſ.\,\zeta\,\sqrt{v} - \sqrt{k} = -\sqrt{(k\,ſin.\,\zeta^4 + a\,coſ.\,\zeta^2\,ſin.\,\theta\,(coſ.\,\alpha - coſ.\,\Phi) + a\,(\alpha - \Phi)\,ſin.\,\zeta\,coſ.\,\zeta\,coſ.\,\theta)}$$

Hic ergo valor in affirmatiuum abire, ſeu angulus $ACS = \Phi$ augmenta capere nequit, niſi poſtquam fuerit quantitas illa radicalis $= 0$. Poſtquam autem hoc eue-

euenerit, tum ſigni illius radicalis valor affirmatiue erit accipiendus.

## COROLL 3.

23. Quoniam autem ab initio angulus $\Phi$ decreſcit tam diu, donec valor quantitatis illius radicalis euaneſcit, eousque $\Phi$ vltra $\alpha$ diminuetur, ſeu erit $\Phi < \alpha$: Ponatur ergo $\Phi = \alpha - \psi$, vt ſit

$$\text{coſ.}\,\zeta \surd v - \surd k = -\surd(k\,\text{ſin.}\,\zeta^4 + a\,\text{coſ.}\,\zeta^2\theta(\text{coſ.}\,\alpha - \text{coſ.}(\alpha - \psi)) + a\,\psi\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta)$$

ſicque quamdiu augendo valorem ipſius $\psi$, iſta quantitas radicalis realem retinet valorem, tamdiu globulus a motu cylindri in plagam B$s$A abripietur; neque prius in plagam contrariam motum ſuum vertet, quam vbi $\psi$ eousque increuerit, vt ſit

$$k\,\text{ſin.}\,\zeta^4 + a\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta(\text{coſ.}\,\alpha - \text{coſ.}(\alpha\ \psi)) + a\psi\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta = 0$$

## COROLL 4.

24. Quia autem augendo $\psi$ extremus terminus continuo creſcit, medius vero qui eſt negatiuus $-a\,\text{coſ.}\,\zeta^2$ ſin. $\theta$ (coſ. $(\alpha - \psi)$ $-$ coſ. $\alpha$) tamdiu tantum creſcit, quoad fiat $\psi = \alpha$, ſeu $\Phi = 0$, manifeſtum eſt, niſi formula illa in nihilum abeat, antequam fiat $\psi = \alpha$, eam nunquam eſſe euaniturам; globulumque continuo celerius ſecundum motum cylindri gyratorium abreptum iri. Hoc ergo caſu punctum S continuo celerius in plagam BEA conuertetur.

## COROLL 5.

25. Si ergo quantitas iſta radicalis ponatur $=$ V, vt ſit coſ. $\zeta \surd v - \surd k = -$ V, ſeu $\surd v = \frac{\surd k - V}{\text{coſ.}\,\zeta}$, ob valorem ipſius V hoc caſu continuo creſcentem, celeritas

ritas globuli progreſſiua in helice ſecundum directionem eius EMN tandem euaneſcet, poſteaque adeo fiet negatiua, quod vbi acciderit, globulus per helicem reuertetur, ac per orificium E iterum erumpet; ſiquidem cylindrus fuerit longus, vt globulus in ſuperiori helicis termino K non erumpat, antequam reuertatur.

## SCHOLION.

**26.** Cum poſito $\Phi = \alpha - \psi$, et

$$V = \sqrt{(k \,\text{ſin.}\, \zeta^2 - a \,\text{coſ.}\, \zeta^2 \,\text{ſin.}\, \theta \,(\text{coſ.}\,(\alpha - \psi) - \text{coſ.}\, \alpha)} \\ \overline{+ \,a\, \psi \,\text{ſin}\, \zeta \,\text{coſ.}\, \zeta \,\text{coſ.}\, \theta)}$$

quantitas V tamdiu negatiue ſit accipienda, ſeu habeatur coſ. $\zeta \sqrt{v} - \sqrt{k} = -V$, quamdiu augendo angulum $\psi$ quantitas V realem obtinet valorem; ſtatim autem atque haec quantitas V euaſerit $= o$, inde angulus $\psi$ iterum decreſcat, ſignumque contrarium ipſi V tribui debeat, vt ſit coſ. $\zeta \sqrt{v} - \sqrt{k} = + V$; duos habebimus caſus principales euoluendos, quorum altero vſpiam augendo $\psi$ ab initio fit $V = o$, altero vero hoc nunquam euenit. Statim autem ab initio fiet $V = o$, ſi ſit vel $k = o$ vel $\zeta = o$: tum aliquo tempore poſt initium hoc euenire ponamus, denique vero nunquam; vnde ſequentes caſus diligentius euoluamus.

## CASVS 1.

**27.** Ponamus ergo primo motum cylindri rotatorium penitus euaneſcere, ſeu eſſe $k = o$. Cum igitur in ipſo initio fiat $V = o$, ſtatim ab initio ipſi V contrarium ſigno tribui debet, vt ſit coſ. $\zeta \sqrt{v} = + V$, ſeu $\sqrt{v} = \frac{V}{\text{coſ.}\, \zeta}$, atque angulus $\psi$ inde iam erit negatiuus, ſeu angulus $\Phi$ continuo creſcet, vt ſit

V = V

$V = \sqrt{(a \,\mathrm{coſ.}\zeta^2 \,\mathrm{ſin.}\theta (\mathrm{coſ.}\alpha - \mathrm{coſ.}\Phi) + a(\alpha - \Phi) \,\mathrm{ſin.}\zeta \,\mathrm{coſ.}\zeta \,\mathrm{coſ}\,\theta)}$
et $dt = \frac{a\, d\omega}{\sqrt{k}} = \frac{a d\Phi}{V}$, atque $EM = x = \frac{a(\Phi - \alpha)}{\mathrm{coſ.}\zeta}$.
Quia ergo initio erat $\Phi = \alpha$, et $\sqrt{v} = o$, ponamus tempore elapſo $t$, eſſe $\Phi = \alpha + \psi$, vt ſit
$V = \sqrt{(a \,\mathrm{coſ.}\zeta^2 \,\mathrm{ſin.}\theta (\mathrm{coſ.}\alpha - \mathrm{coſ.}(\alpha + \psi)) - a\psi \,\mathrm{ſin.}\zeta \,\mathrm{coſ.}\zeta \,\mathrm{coſ.}\theta)}$
et $x = \frac{a\psi}{\mathrm{coſ.}\zeta}$ atque $dt = \frac{a\, d\psi}{V}$.

Hic iam perſpicuum eſt, fieri omnino non poſſe, vt angulus $\psi$ continuo creſcat, niſi ſit $\mathrm{ſin.}\,\zeta \,\mathrm{coſ.}\,\zeta \,\mathrm{coſ.}\,\theta = o$, quem caſum ſeorſim euoluere conueniet. Quodſi vero $\psi$ creſcere ceſſet, quo eueniet, vbi $V = o$, ibi globulus ad ſtatum quietis redigetur, ac in helice regredi incipiet, a quo ergo momento valor ipſius V negatiue capi debebit, angulusque $\psi$ iterum decreſcet, donec fiat $\psi = o$. et tum corpus rurſus in E, ſicuti initio, haerebit; vnde eundem motum denuo inchoabit.

At euenire poteſt, vt haec globuli reuerſio in ipſum quaſi initium motus incidat, atque angulus $\psi$ ne mininum quidem augeri queat, quin angulus $\Phi$ maneat nullus, vel adeo fiat negatiuus.

Prior caſus locum habebit, ſi poſito $\psi$ infinite paruo, valor ipſius V nihilominus maneat $= o$; id quod vſu veniet $\mathrm{ſin.}\,\alpha \,\mathrm{coſ.}\,\zeta^2 \,\mathrm{ſin.}\,\theta \,\mathrm{ſin.}\,\alpha = a \,\mathrm{ſin.}\,\zeta \,\mathrm{coſ.}\,\zeta \,\mathrm{coſ}\,\theta$ ſeu $\mathrm{ſin.}\,\alpha = \frac{\mathrm{tang}\,\zeta}{\mathrm{tang}\,\theta}$ ac tum corpus perpetuo in puncto E quieſcet; hic enim directio helicis erit horizontalis.

Poſterior caſus autem locum habebit, ſi $\mathrm{ſin.}\,\alpha < \frac{\mathrm{tang}\,\zeta}{\mathrm{tang}\,\theta}$ quo globulus ne in helicem quidem ingredietur, ſed ſtatim inde delabetur; vel ſi cylindrus deorſum eſſet continuatus, mutata directione globulus per helicis partem interiorem deſcenſurus eſſet; ita vt angulus $\psi$ tum fieret negatiuus perinde ac valor ipſius $x$, et V.

Hi

Hi autem caſus locum non inueniunt, niſi ſit $\theta > \zeta$, ſeu inclinatio baſis cylindri ad horizontem maior, quam angulus BEF, quem helix cum baſi cylindri conſtituit. Hunc autem motum in helice quieſcente fuſius non perſequor, cum nihil habeat difficultatis.

## CASVS II.

28. Ponamus motum gyratorium cylindri ita eſſe comparatum, vt motus gyratorius globuli circa axem, qui angulo $\psi$ indicatur, et initio cum motu gyratorio cylindri in eandem plagam fuerat directus, poſt aliquod tempus in plagam oppoſitam reflectatur.

Angulus ergo $\psi$ eo vsque augeri poterit, vt fiat

$$k\,\text{ſin.}\,\zeta^4 = a\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta(\text{coſ.}(\alpha-\psi)-\text{coſ.}\,\alpha) - a\psi\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta$$

ſeu $V = 0$; hoc autem fieri nequit, niſi ſit

$$\text{coſ.}\,(\alpha-\psi) - \text{coſ.}\,\alpha > \frac{\text{tang.}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta}.\,\psi.$$

cum igitur ab initio fuiſſet $\psi = 0$, neceſſe eſt, vt poſito $\psi$ euaneſcente, ſit $\text{ſin.}\,\alpha > \frac{\text{tang}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta}$. Deinde valor ipſius $\text{coſ.}\,(\alpha-\psi) - \text{coſ.}\,\alpha - \frac{\text{tang}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta}\,\psi$ erit maximus, ſi

$$\text{ſin.}\,(\alpha-\psi) = \frac{\text{tang.}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta}.$$

Concipiamus hoc pro $\psi$ valore ſubſtituto fieri

$$\text{coſ.}\,(\alpha-\psi) - \text{coſ.}\,\alpha - \frac{\text{tang.}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta} : \psi = M$$

atque vt valor ipſius V augendo $\psi$ tandem euaneſcere queat, neceſſe eſt, vt ſit $k\,\text{ſin.}\,\zeta^4 < a\,M\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta$. Quare, vt hic caſus locum habere poſſit, ſequentes tres conditiones requiruntur.

I. vt ſit $\text{tang.}\,\theta > \text{tang.}\,\zeta$ ſeu $\theta > \zeta$; ita vt fractio $\frac{\text{tang.}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta}$ vnitatem non excedat.

II. vt ſit $\text{ſin.}\,\alpha > \frac{\text{tang.}\,\zeta}{\text{tang.}\,\theta}$: ac denique

III. vt ſit $k < a\,M\,\frac{\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\zeta^4}$.

 Quo-

Quoties ergo hae tres conditiones locum inueniunt, globulus in helice in ſenſum BEA circa axem cylindri circumferetur, donec deſcripſerit angulum $\psi$; vt fiat

$V = \surd(k \text{ ſin. } \zeta^4 - a \text{ coſ. } \zeta^2 \text{ ſin. } \theta (\text{coſ. } (\alpha - \psi) - \text{coſ. } \alpha) + a\psi \text{ ſin. } \zeta \text{ coſ. } \zeta \text{ coſ. } \theta) = o$, tumque erit coſ. $\zeta \surd v - \surd k = o$, ſeu globuli celeritas relatiua per helicem $\surd v = \frac{\surd k}{\text{coſ. } \zeta}$; cum antequam ad hunc locum perueniat, ſit $\surd v = \frac{\surd k - V}{\text{coſ. } \zeta}$; exiſtente $x = \frac{a\omega - a\psi}{\text{coſ. } \zeta}$ et $d\omega = \frac{dt \surd k}{a} = \frac{d\psi \surd k}{V}$. Poſtquam autem hunc locum attigerit, angulus $\psi$ continuo decreſcet, ſeu motus angularis globuli fiet contrarius motui cylindri, et tribuendo ipſi V ſignum contrarium, habebitur $\surd v = \frac{\surd k + V}{\text{coſ. } \zeta}$, et quando fiet $\psi = o$, erit $V = \text{ſin } \zeta^2 \surd k$, hincque $\surd v = \frac{(1 + \text{ſin. } \zeta^2)}{\text{coſ. } \zeta} \surd k$ et $x = \frac{a\omega}{\text{coſ. } \zeta}$. Inde fiet $\psi$ negatiuum, et diſtantia $x$ adhuc magis creſcet, dum poſito $\psi$ negatiuo fiet $x = \frac{a\omega + a\psi}{\text{coſ. } \zeta}$, donec fiat

$$V = \surd(k \text{ ſin. } \zeta^4 + a \text{ coſ. } \zeta^2 \text{ ſin. } \theta (\text{coſ. } \alpha - \text{coſ. } (\alpha + \psi)) - a\psi \text{ ſin. } \zeta \text{ coſ. } \zeta \text{ coſ. } \theta) = o$$

et eo vsque erit $\surd v = \frac{\surd k + V}{\text{coſ. } \zeta}$: vbi autem fuerit $V = o$, euadet $\surd v = \frac{\surd k}{\text{coſ. } \zeta}$; qui ergo valor ante hoc tempus maximus fuit, vbi erat ſin. $(\alpha + \psi) = \frac{\text{tang. } \zeta}{\text{tang. } \theta}$. Poſtquam autem fuerit $V = o$, angulus $\psi$ iterum decreſcet, indeque etiam diſtantia $x$ minora capiet incrementa, eritque $\surd v = \frac{\surd k - V}{\text{coſ. } \zeta}$, donec euadat $\psi = o$, tumque erit $V = \text{ſin. } \zeta^2 \surd k$ et $\surd v = \text{coſ. } \zeta \surd k$, atque $x = \frac{a\omega}{\text{coſ. } \zeta}$. Hoc ergo tempore celeritas $\surd v$ eadem erit, quae erat initio, indeque motus ſimili modo propagabitur.

Motus

Motus ergo per helicem continuo erit progreſſiuus, ſi perpetuo fuerit $V < \sqrt{k}$: ſin autem inter eas motus partes, vbi $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{coſ. \zeta}$, eueniat, vt fiat $V > \sqrt{k}$, tum globulus ibi per helicem regredietur, donec $\sqrt{v}$ iterum fiat affirmatiuum. Valores autem affirmatiui praeualebunt; vidimus enim poſt primam periodum, quia celeritas ad initialem redit, globulum ſpatium abſoluiſſe in helice $x = \frac{a\omega}{coſ. \zeta}$, et poſt $n$ huiusmodi periodos promouebitur per ſpatium helicis $x = \frac{n a \omega}{coſ. \zeta}$, ſicque continuo altius eleuabitur, donec tandem per ſuperius orificium K eiiciatur.

## CASVS III.

29. Ponamus motum ita eſſe comparatum, vt poſtquam ab initio angulus $\psi = \alpha - \Phi$ increſcere coepit, nunquam euadat

$$V = \sqrt{(k \,\text{ſin.}\, \zeta^4 - a \,\text{coſ.}\, \zeta^2 \,\text{ſin.}\, \theta (\text{coſ.}\, (\alpha - \psi) - \text{coſ.}\, \alpha) + a \psi \,\text{ſin.}\, \zeta \,\text{coſ.}\, \zeta \,\text{coſ.}\, \theta)} = o$$

vnde hic angulus $\psi$ continuo magis augebitur, valorque ipſius V increſcet. Tum autem prodibit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{coſ. \zeta}$, ex quo ſequitur, celeritatem $\sqrt{v}$ tandem euaneſcere, globulumque inde ad inferiorem cylindri partem reuerti, donec in E iterum elabatur. Hoc etiam intelligitur ex formula $x = \frac{a(\omega - \psi)}{coſ. \zeta}$; diſtantia enim $x$ diminuetur, ſi fuerit $d\omega < d\psi$ ſeu, $\frac{d\psi \sqrt{k}}{V} < d\psi$, quod vtique euenit, quando $\sqrt{k} < V$ ſeu $\sqrt{v}$ negatiuum.

Hic ergo caſus, quo globulum non vltra datum terminum in helice promouere licet, in ſequentibus caſibus locum habet:

1° Si tang. $\theta <$ tang $\zeta$ ſeu angulus $PQR < BEF$, quomodocunque reliquae quantitates ſe habeant.

2° Si fuerit ſin. $\alpha < \frac{tang. \zeta}{tang. \theta}$, ita vt etiamſi ſit $\zeta < \theta$ tamen hoc caſu globulus reuertatur in helice.

3° Etiamſi ſit $\zeta < \theta$ et ſin. $\alpha > \frac{tang. \zeta}{tang. \theta}$, tamen caſus tertius locum inuenit, ſi fuerit $k > \frac{a\, coſ. \zeta^2\, ſin. \theta}{ſin. \zeta^4}$. M denotante M maximum valorem, quem expreſſio $coſ. (\alpha - \psi) - coſ. \alpha - \frac{tang. \zeta}{tang. \theta}$. $\psi$ induere valet.

Hinc ergo patet, gyrationis motum nimis celerem non eſſe aptum ad globulum ad datam quamuis altitudinem eleuandum, cum motus tardior hunc effectum praeſtare valeat. Fieri ergo poteſt, vt ob gyrationem nimium velocem effectu fruſtremur, quem tamen tardiore motu conſequi poſſemus.

## EXEMPLUM.

30. Sit $\frac{tang. \zeta}{tang. \theta} = \frac{1}{2}$ et angulus initialis ACE rectus, ſeu $\alpha = 90°$, atque $\psi = 90° - \Phi$, ſicque $\psi$ denotabit angulum, quo globulus circa axem verſus punctum ſummum A ab E eſt translatum tempore $t$, quo cylindrus per angulum $= \omega$ eſt conuerſus, ita vt ſit $d\omega = \frac{dt \sqrt{k}}{a}$. Habebimus ergo $V = \sqrt{(k\, ſin. \zeta^4 - a\, coſ. \zeta^2\, ſin. \theta\, (ſin. \psi - \frac{1}{2}\psi))}$, et $d\omega = \frac{d\psi \sqrt{k}}{V}$ atque $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{coſ. \zeta}$; nec non $x = \frac{a(\omega - \psi)}{coſ. \zeta}$. Quamdiu ergo motus gyratorius globuli in ſenſum BEA dirigitur, valor ipſius V in his formulis affirmatiue accipi debet, contra vero negatiue.

Ab initio ergo creſcente $\psi$, decreſcit valor ipſius V ob ſin. $\psi > \frac{1}{2}\psi$: quamdiu manet $k\, ſin. \zeta^4 > a\, coſ. \zeta^2$ ſin.

$\text{ſin.}\,\theta(\text{ſin.}\,\psi - \frac{1}{2}\psi)$. Cum igitur ipſius ſin. $\psi - \frac{1}{2}\psi$ valor maximus ſit, ſin. $\psi = 60^\circ = \frac{1}{3}\pi$, denotante $\pi$ angulum duobus rectis aequalem, fiatque hic valor maximus $= \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi = 0{,}3424267$. Quod ſi ergo fuerit $k\,\text{ſin.}\,\zeta^4 < 0{,}3424267\; a\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta$, caſus ſecundus locum habebit, caſus vero tertius ſi $k$ ſin. $\zeta^4 > 0{,}3424267\; a\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta$. Illo ſcilicet globulus motu angulari tandem reuertetur, hoc vero nunquam. Sit breuitatis ergo $\frac{\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{ſin.}\,\zeta^4} = n$, vt ſit

$$V = \text{ſin.}\,\zeta^2 \sqrt{(k - na(\text{ſin.}\,\psi - \tfrac{1}{2}\psi))}$$

I. Ac ponamus primo eſſe $k > 0{,}3424267\,na$; atque angulus $\psi$ continuo creſcet, valor autem ipſius $V$ initio decreſcet, donec fiat $\psi = 60^\circ$, vbi valor ipſius $V$ erit minimus, ſcilicet $= \text{ſin.}\,\zeta^2\sqrt{(k - 0{,}3424267\,na)}$, ideoque celeritas globuli progreſſiua per helicem maxima. Inde vero valor ipſius $V$ iterum augebitur, tandemque quando ſin. $\psi = \frac{1}{2}\psi$, quod euenit ſi $\psi = 108^\circ, 36^{I}\, 13^{II}, 56^{III}, 22^{IV}$ fiet $V = \text{ſin.}\,\zeta^2.\sqrt{k}$ et $\sqrt{v} = \text{coſ.}\,\zeta.\sqrt{k}$, quae celeritati initiali eſt aequalis. Poſtea vero creſcente vlterius angulo $\psi$, valor ipſius $V$ magis augebitur, fietque tandem $V = \sqrt{k}$, ſeu $k(1 - \text{ſin.}\,\zeta^4) = a\,\text{coſ.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta\,(\frac{1}{2}\psi - \text{ſin.}\,\psi)$ ſeu $\frac{1}{2}\psi - \text{ſin.}\,\psi = \frac{k(1 + \text{ſin.}\,\zeta^2)}{a\,\text{ſin.}\,\theta}$; hicque celeritas globuli in helice euaneſcet, ex quo is reuerti incipiet, et quidem motu accelerato, quoniam, creſcente $\psi$ vltra hunc terminum, quantitas $V$ eo maiora capit augmenta. Definito autem $\psi$ ex aequatione $\frac{1}{2}\psi - \text{ſin.}\,\psi = \frac{k(1 + \text{ſin.}\,\zeta^2)}{a\,\text{ſin.}\,\theta}$, quantitas $x = \frac{a(\omega - \psi)}{\text{coſ.}\,\zeta}$ dabit ſpatium in helice, ad quod globulus penetrauerit, et vnde deinceps reuertitur. Tempus autem, quo huc vsque pertin-

git, ſeu angulus $\omega$, a cylindro interea motu gyratorio confectus, definitur hac aequatione:

$$\omega = \int \frac{d\psi \sqrt{k}}{\text{ſin.}\zeta^2 \sqrt{(k - na\,\text{ſin.}\psi + \frac{1}{2}na\psi)}}$$

quo inuento ſimul vera via $x$ in helice percurſa innoteſcit.

II. Ponamus eſſe $k < 0,3424267\,na$, angulusque $\psi$ eo vsque creſcet, donec fiat $k = na(\text{ſin.}\psi - \frac{1}{2}\psi)$, quod euenit antequam euadet $\psi = 60°$; tumque erit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k}}{\text{coſ.}\zeta}$ ob $V = o$, hactenus ergo celeritas $\sqrt{v}$ augendo increuit; hicque conſtituamus primam partem motus globuli per helicem.

$2^{do}$. Ab hoc autem momento angulus $\psi$ iterum diminuetur, et valor $V = \text{ſin.}\zeta^2 \sqrt{(k - na\,(\text{ſin.}\psi - \frac{1}{2}\psi))}$ negatiue capi debet, vt ſit $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} + V}{\text{coſ.}\zeta}$, ſicque labente tempore valor ipſius V iterum increſcet, donec euadente $\psi = o$, fiat $V = \text{ſin.}\zeta^2 \sqrt{k}$ et $\sqrt{v} = \frac{(1 + \text{ſin.}\zeta^2)\sqrt{k}}{\text{coſ.}\zeta}$; hicque ſecundam motus partem terminemus, in cuius fine $\psi = o$, et celeritas globuli $\sqrt{v}$, maior exiſtit, quam adhuc fuit.

$3^o$. Nunc igitur angulus $\psi$ negatiuus eſſe incipit; poſito ergo $-\psi$ loco $\psi$, habebimus $V = \text{ſin.}\zeta^2 \sqrt{(k + na\,(\text{ſin.}\psi - \frac{1}{2}\psi))}$, manente $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} + V}{\text{coſ.}\zeta}$: et quia ſin. $\psi - \frac{1}{2}\psi$ creſcit, quamdiu $\psi$ eſt $< 60°$, ad hunc vsque terminum $\psi = 60°$, valor ipſius V, hincque celeritas $\sqrt{v}$ augebitur; et facto $\psi = 60°$, celeritas globuli in helice progreſſiua erit maxima, ſcilicet

$$\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} + \text{ſin.}\zeta^2 \sqrt{(k + 0,3424267\,na)}}{\text{coſ.}\zeta},$$

4°.

$4^{to}$. Deinde vlterius creſcente hoc angulo $\psi$, qui nunc eſt $= \Phi - \alpha$, valor ipſius $V$ iterum decreſcet, et quando fit $\psi = 108^\circ, 36^I, 13^{II}, 56^{III}, 20^{IV}$, erit $V = \sin.\zeta^2 \surd k$ et $\surd v = \frac{(1+\sin.\zeta^2)\surd k}{\cos.\zeta}$.

$5^{to}$. Angulus autem $\psi$ vltra hunc terminum creſcere perget, et quia tum $\frac{1}{2}\psi > \sin\zeta$, erit $V = \sin.\zeta^2 \surd(k - n\alpha(\frac{1}{2}\psi - \sin.\psi))$ et $\surd v = \frac{\surd k + V}{\cos.\zeta}$. Valor ergo ipſius $V$ continuo fiet minor, indeque etiam celeritas $\surd v$, donec fiat $\frac{1}{2}\psi - \sin.\psi = \frac{k}{n\alpha}$, quo caſu erit $\surd v = \frac{\surd k}{\cos.\zeta}$.

$6^{to}$. Tum autem hic angulus $\psi$, qui maior eſt quam $108^\circ, 36^I$, iterum decreſcet; fietque $\surd v = \frac{\surd k - V}{\cos.\zeta}$ exiſtente $V = \sin.\zeta^2 \surd(k - n\alpha(\frac{1}{2}\psi - \sin.\psi))$; ſicque celeritas $\surd v$ decreſcet, et quando fit $\psi = 108^\circ\ 36^I$, prodibit $V = \sin.\zeta^2 \surd k$ et $\surd v = \cos.\zeta \surd k$, quae aequalis eſt celeritati initiali.

$7^{mo}$. Porro angulus $\psi$ infra hunc terminum decreſcet, et ob $\sin.\psi > \frac{1}{2}\psi$, erit $V = \sin.\zeta^2 \surd(k + na(\sin.\psi - \frac{1}{2}\psi))$ et $\surd v = \frac{\surd k - V}{\cos.\zeta}$: et quando fit $\psi = 60$, quo caſu valor ipſius $V$ erit maximus $= \sin.\zeta^2 \surd(k + 0,3424267\,na)$, et celeritas globuli minima $\surd v = \frac{\surd k - \sin.\zeta^2 \surd(k + 0,3424267\,na)}{\cos.\zeta}$. Niſi ergo ſit $\surd k > \sin.\zeta^2 \surd(k + 0,3424267\,na)$ ſeu $k > \frac{0,3424267\,a \sin.\theta}{1+\sin.\zeta^2}$, cum ſit $k < \frac{0,3424267\,a \cos.\zeta^2 \sin.\theta}{\sin.\zeta^4}$; globulus antequam ad hunc terminum peruenit, regredietur in helice, propterea quod eius celeritas $\surd v$ fit negatiua. Reuertitur ergo globulus, ſi ſit $k < \frac{0,3424267\,a \sin.\theta}{1+\sin.\zeta^2}$, non autem reuertetur, ſed perpetuo per cochleam progredi perget, ſi ſit $k > \frac{0,3424267\,a \sin.\theta}{1+\sin.\zeta^2}$. Quia autem eſſe debet $k < \frac{0,3424267\,a \cos.\zeta^2 \sin.\theta}{\sin.\zeta^4}$, manifeſtum eſt, hunc

caſum

caſum locum obtinere non poſſe, niſi ſit $1 > 2$ ſin. $\zeta^2$, ſeu ſin. $\zeta < \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; hoc eſt: niſi angulus helicis $\zeta$ minor ſit quam $57^\circ, 14'$.

$8^{vo}$. Poſtquam autem angulus $\psi$ vltra $60^\circ$ fuerit diminutus, etiam vlterius decreſcet, eritque adhuc

$$V = \text{ſin.}\,\zeta^2 \sqrt{(k + 2a(\text{ſin.}\,\psi - \tfrac{1}{2}\psi))} \text{ et } \sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - V}{\text{coſ.}\,\zeta}$$

valorque ipſius V continuo fiet maior, vt et celeritas $\sqrt{v}$, quae mox affirmatiua reddetur, et facto $\psi = 0$ redibit ea, vti erat initio, $\sqrt{v} = \text{coſ.}\,\zeta . \sqrt{k}$.

Cum globulus huc peruenerit, angulus $\psi$ iterum negatiuus euadet, ſeu motus angularis globuli motum cylindri ſequetur, ſeu erit iam $\Phi < \alpha$, ſeu $\Phi < 90^\circ$; vel globulus in ſuperiorem cylindri medietatem eleuabitur, cum a Nro. $3^{tio}$ in inferiore eſſet verſatus: atque nunc pari modo motum ſuum proſequetur, atque ab initio fecerat; ita vt iam eaedem motus partes, quas deſcripſimus, ſint rediturae.

Quod vero ad tempora attinet, quibus quaeque motus huius pars abſoluitur, ea nonniſi per quadraturas definiri poterunt ope formulae $d\omega = \frac{d\psi\sqrt{k}}{V}$; quippe cuius integratio exhiberi nequit.

## PROBLEMA 8.

31. Si vna integra helicis circumuolutio EFG$e$ aqua fuerit repleta, atque cylindrus ſubito in gyrum agi incipiat celeritate vniformi, quae in puncto E ſit $= \sqrt{k}$, idque in ſenſum helici contrarium BEA, inuenire motum, quo iſta aquae portio per helicem promoueatur.

SOLV-

## SOLVTIO.

Poſitis baſis cylindri radio $CA = a$, angulo helicis $BEF = \zeta$, angulo, quem axis cylindri PQ cum verticali conſtituit, $PQR = \theta$; ſit ipſo motus initio angulus $ACE = \alpha$; quo tempore aqua in helice ſpatium $EFGe = f$ occupet, quod cum vni integrae reuolutioni ſit aequale, poſito $\frac{f\,coſ.\zeta}{a} = \gamma$, erit $\gamma$ angulus quatuor rectis aequalis, ſeu denotante $1 : \pi$ rationem radii ad ſemicircumferentiam, erit $\gamma = 2\pi$ et $f = \frac{2\pi a}{coſ.\zeta}$, et ipſa aquae copia $= -\frac{2\pi abb}{coſ.\zeta}$, ſiquidem $bb$ deſignet amplitudinem helicis.

Iam elapſo tempore $t$, quo ipſe cylindrus circa axem conuerſus erit angulo $= \omega$, vt ſit $d\omega = \frac{dt\sqrt{k}}{a}$, ſeu $\omega = \frac{t\sqrt{k}}{a}$, ideoque $t = \frac{a\omega}{\sqrt{k}}$, peruenerit aqua in helice in ſitum $MFGem$; ponatur ergo ſpatium $EM = x$ et celeritas, qua aqua per helicem promouetur $= \sqrt{v}$; vt ſit $dx = dt\sqrt{v} = \frac{ad\omega\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Ponatur angulus $ACS = \Phi$, et ob angulum $ECS = \frac{x\,coſ.\zeta}{a}$, quia punctum E angulo $\omega$ ad A acceſſit, erit $\Phi = \alpha - \omega + \frac{x\,coſ.\zeta}{a}$, ideoque $\frac{x\,coſ.\zeta}{a} = \omega + \Phi - \alpha$: et hinc $\frac{dx\,coſ.\zeta}{a} = \frac{d\omega\,coſ.\zeta.\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = d\omega + d\Phi$, ita vt ſit $d\omega = \frac{d\Phi\sqrt{k}}{coſ.\zeta.\sqrt{v} - \sqrt{k}}$. At ex §. 17 habebitur haec aequatio ob $\gamma = 2\pi$ et $ſin.(\gamma + \Phi) = ſin.\Phi$:

$$coſ.\zeta.\sqrt{v} - \sqrt{k} = \sqrt{(C - a\Phi\,ſin.\zeta\,coſ.\zeta\,coſ.\theta)}.$$

Ipſo autem motus initio aquae in tubo helicis eiusmodi motus imprimitur, vt ſit $\sqrt{v} = coſ.\zeta.\sqrt{k}$, quo caſu cum ſit $\Phi = \alpha$, erit

$$coſ.\zeta.\sqrt{v} - \sqrt{k} = -\sqrt{(k\,ſin.\zeta^4 + a(\alpha - \Phi)\,ſin.\zeta\,coſ.\zeta\,coſ.\theta)}.$$

Ab initio ergo angulus $\Phi$, qui ipſo initio erat $= \alpha$, decreſcit, ſeu terminus aquae M propius ad lineam ſupremam A$a$ eleuatur, quam fuerat initio. Ponamus tempore $t$ hanc apptopinquationem factam eſſe per angulum $\psi$; vt ſit $\Phi = \alpha - \psi$; erit $\frac{x \cos.\zeta}{a} = \omega - \psi$ et $x = \frac{a(\omega - \psi)}{\cos.\zeta}$ tum vero $\cos.\zeta \sqrt{v} - \sqrt{k} = -\sqrt{(k \sin.\zeta^4 + a\psi \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta)}$ ſeu $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{k} - \sqrt{(k \sin.\zeta^4 + a\psi \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta)}}{\cos.\zeta}$ eritque $d\omega = \frac{d\psi \sqrt{k}}{\sqrt{(k \sin.\zeta^4 + a\psi \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta)}}$

Hinc cum initio quo $\omega = 0$, ſit quoque $\psi = 0$, erit integrando:

$$\frac{a\omega \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta}{2\sqrt{k}} = \sqrt{(k \sin.\zeta^4 + a\psi \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta)} - \sin.\zeta^2 \sqrt{k}$$

hincque porro $\psi = \omega \sin.\zeta^2 + \frac{a\omega\omega}{4k} \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta$

Ex quo obtinemus pro tempore per angulum $\omega$ indicato:

$$\sqrt{v} = \cos.\zeta \sqrt{k} - \frac{a\omega \sin.\zeta \cos.\theta}{2\sqrt{k}}$$

et $x = a\omega \cos.\zeta - \frac{aa\omega\omega}{4k} \sin.\zeta \cos.\theta$

elapſo autem tempore $t$ eſt $\omega = \frac{t\sqrt{k}}{a}$; ita vt ſit

$$\sqrt{v} = \cos.\zeta \sqrt{k} - \tfrac{1}{2} t \sin.\zeta \cos.\theta$$

et $x = t \cos.\zeta \sqrt{k} - \frac{1}{4} tt \sin.\zeta \cos.\theta$

ſpatium ergo SM, per quod aqua iam ſecundum directionem axis cylindri erit promota, erit

$$x \sin.\zeta = t \sin.\zeta \cos.\zeta \sqrt{k} - \tfrac{1}{4} tt \sin.\zeta^2 \cos.\theta$$

vnde ſpatium, per quod verticaliter iam erit eleuata aqua concluditur

$$x \sin.\zeta \cos.\theta = t \sin.\zeta \cos.\zeta \cos.\theta \sqrt{k} - \tfrac{1}{4} tt \sin.\zeta\theta^2 \cos.\theta^2$$

## COROLL. 1.

32. Si cylindrus plane non in gyrum ageretur, ſed in quiete relinqueretur, vt eſſet $k = 0$, tunc elapſo

tempore

tempore $t$ eſſet $\sqrt{v} = -\frac{1}{2} t \sin.\zeta \cos.\theta$ et $x = -\frac{1}{4} tt \sin.\zeta \cos.\theta$. Aqua ergo, ſiquidem cochlea deorſum vltra E eſſet continuata, motu vniformiter accelerato, per cylindrum deſcenderet, eiusque motus ſimilis foret deſcenſui corporis ſuper plano inclinato, cuius anguli inclinationis ad horizontem ſinus eſſet $= \sin.\zeta^2 \cos.\theta$

## COROLL. 2.

33. Cylindro autem in gyrum acto in ſenſum BEA celeritate $= \sqrt{k}$, aqua quidem ab initio motus ſecundum cylindrum aſcendet, quamdiu fuerit $k > \frac{1}{2} a\omega \tang\zeta \cos.\theta$ ſeu $\sqrt{k} > \frac{1}{2} t \tang\zeta \cos.\theta$: Elapſo autem tempore $t = \frac{2\sqrt{k}}{\tang\zeta \cos.\theta}$, motus aſcenſus ceſſabit, poſteaque aqua per cylindrum deſcendere incipiet.

## COROLL. 3.

34. Poſito ergo $t = \frac{2\sqrt{k}}{\tang\zeta \cos.\theta}$, maximum ſpatium $x$ per quod aqua in cochlea fuerit promota, erit $x = \frac{k \cos.\zeta^2}{\sin.\zeta \cos.\theta}$; ideoque ſecundum longitudinem cylindri confecit ſpatium $x \sin.\zeta = \frac{k \cos.\zeta^2}{\cos.\theta}$; et perpendiculariter reperietur eleuata ad altitudinem $x \sin.\zeta \cos.\theta = k \cos.\zeta^2$.

## COROLL. 4.

35. Portio ergo aquae, quae integram ſpiralis reuolutionem implet, ope cochleae archimedeae ad maiorem altitudinem eleuari nequit, quam quae ſit $= k \cos.\zeta^2$. Quo celerius ergo cylindrus in gyrum agitur, eo altius haec aquae portio eleuari poterit, et haec quidem altitudo proportionalis erit quadrato celeritatis gyrationis.

## COROLL. 5.

36. Sit altitudo, ad quam aqua ope cochleae Archimedis eleuari debeat, $= c$; praeſtabiturque hoc tempore $t$ vt ſit

$$c = t\,\text{ſin.}\zeta\,\text{coſ.}\zeta\,\text{coſ.}\theta\,\sqrt{k} - \tfrac{1}{4}tt\,\text{ſin.}\zeta^2\,\text{coſ.}\theta^2$$

ſeu $t = \dfrac{2\,\text{coſ.}\zeta\,\sqrt{k} - 2\sqrt{(k\,\text{coſ}\,\zeta^2 - c)}}{\text{ſin.}\zeta\,\text{coſ.}\theta}$.

Vt iam hoc tempus ſit omnium minimum, angulus $\zeta$ ita eſſe debet comparatus, vt ſit $\text{tang}\,\zeta^4 = 1 - \frac{c}{k}$

ſeu $\text{tang}\,\zeta = \sqrt[4]{(1 - \frac{c}{k})}$.

## COROLL. 6.

37. Poſito autem $\text{tang}\,\zeta = \sqrt[4]{(1 - \frac{c}{k})}$, erit tempus illud minimum, quo aqua per altitudinem $c$ eleuatur: $t = \dfrac{2\sqrt{k}}{\text{coſ.}\theta}(\text{coſ.}\zeta - \text{tang.}\zeta) = \dfrac{2\sqrt{k} - 2\sqrt{(k-c)}}{\text{coſ.}\theta\,\sqrt[4]{(1-\frac{c}{k})}}$

quod ſit infinitum ſi $k = c$, at vero nullum ſi $k = \infty$. Quo maior ergo capiatur celeritas gyratoria $\sqrt{k}$, et quo minor ſimul ſtatuatur angulus $PQR = \theta$, eo breuiori tempore aqua ad altitudinem $c$ eleuabitur.

## COROLL. 7.

38. Patet ergo etiamſi cochlea Archimedis ſitum obtineat verticalem, eius tamen ope aquam ad quamvis altitudinem eleuari poſſe, dummodo cochlea ſatis celeriter in gyrum agatur. Hoc autem caſu ob $\theta = 0$, perinde eſt ſiue aqua integram helicis reuolutionem impleat, ſiue ſecus. Ac tempus quidem eleuationis hoc caſu

caſu minus erit, quam ſi cylindrus ad horizontem eſſet inclinatus.

## SCHOLION.

39. Patet ergo inſignem eſſe differentiam inter eleuationem aquae per cochleam Archimedis, prout aqua eleuanda vel integram ſpirae reuolutionem impleat, vel tantum minimam eius portionem occupet, ſi enim aqua integram ſpiram adimplet, ea non vltra certam altitudinem eleuari poteſt, quantumuis celeriter cochlea in gyrum agatur; contra autem vidimus, ſi minima aquae portio tantum cochleae immittatur, fieri poſſe, vt ea ad quamuis altitudinem eleuetur, atque hoc quidem motu gyrationis non admodum celeri: nam ex praecedentibus perſpicitur, motum nimis celerem aſcenſui aduerſari, et aquam iterum deorſum ferre, quae tamen a motu tardiore continuo aſcendere perrexiſſet. Vt enim particula aquae cochleae in E initio immiſſa continuo aſcendere pergat, primum requiritur vt ſit $\theta > \zeta$ ſeu ang. PQR > ang. BEF. Deinde vt ſit ſin. $\alpha$ ſeu ſin. ACE $> \frac{\tang \zeta}{\tang \theta}$: tertio autem requiritur, vt, denotante M maximum valorem poſitiuum, quem expreſſio $\operatorname{coſ.}(\alpha-\psi) - \operatorname{coſ.}\alpha - \frac{\tang \zeta}{\tang \theta}\cdot\psi$ recipere valet, quod euenit caſu $\operatorname{ſin.}(\alpha-\psi) = \frac{\tang \zeta}{\tang \theta}$, fit $k > a\mathrm{M}.\frac{\operatorname{coſ.}\zeta^2 \operatorname{ſin.}\theta}{\operatorname{ſin.}\zeta^4}$. Si ergo altitudo celeritati gyrationis debita $k$ ſuperaret hanc quantitatem, aqua, poſtquam ad certam altitudinem perueniſſet, iterum delaberetur. Verum neuter horum caſuum in praxi communi, vbi cochlea Archimedis ad aquas eleuandas adhibetur, locum habet: quodſi enim tota cylindri baſis inferior AB aquae eſt ſubmerſa, tota

helix ſemper eſt aqua repleta, vnde quaeſtio, quanta celeritate et ad quantam altitudinem cochlea in gyrum acta aquam ſit eleuatura, ab his binis, quas tractauimus, penitus eſt diuerſa, propterea quod aqua in E continuo influit, in K vero iterum egeritur. Hanc igitur quaeſtionem difficillimam in ſequente problemate enodare conabor.

## PROBLEMA 9.

40. Si tota baſis cylindri aquae ſit ſubmerſa, isque motu vniformi in gyrum agatur, definire motum aquae per cochleam.

## SOLVTIO.

Poſitis, vt hactenus, radio baſis CA $= a$, angulo helicis BEF $= \zeta$, et inclinationis PQR $= \theta$: ſit altitudo aquae ſupra centrum baſis C $= c$, longitudo totius cylindri A$a$ $=$ B$b$ $= b$, et EFGHIK repraeſentet totam helicem, cuius propterea longitudo eſt $= \frac{b}{\text{ſin.}\,\zeta}$; ac ſi eius amplitudo dicatur $= hh$, erit quantitas aquae in helice contentae $= \frac{bhh}{\text{ſin.}\,\zeta}$; tum vero ſumma ſpirarum ad baſin relatarum praebebit in eius peripheria arcum $= \frac{b.\,\text{coſ.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\zeta}$. Scilicet ſi a puncto helicis quocunque Z ad baſin ducatur recta axi parallela ZY, arcusque EY ponatur $= s$, poſito $s = 0$, habebitur terminus helicis inferior E, at poſito $s = \frac{a\,\text{coſ.}\,\zeta}{\text{ſin.}\,\zeta}$ prodibit terminus helicis ſuperior K. Gyretur nunc cylindrus in ſenſum BEA, ita vt celeritas puncti E ſit $= \sqrt{k}$: poſitoque arcu EA $= p$, elapſo tempuſculo $dt$ erit $dp = -dt\sqrt{k}$. Praeſenti autem temporis momento ſit aquae per helicem

tem aſcendentis celeritas $= \sqrt{v}$: quod ſi iam ſtatus compreſſionis aquae in helicis loco quocunque $Z$ ponatur $= q$, exiſtente arcu $EY = s$, hanc ſupra inuenimus aequationem

$$q\cos.\zeta = C - a\cos.\zeta\sin.\theta\cos.\frac{p+s}{a} - s\sin.\zeta\cos.\theta - \frac{s\,dv}{dt\sqrt{v}}.$$

Quando autem aqua in K libere effluit, poſito $s = \frac{b\cos.\zeta}{\sin.\zeta}$, ſtatus compreſſionis in K euaneſcere debet, erit ergo $C = a\cos.\zeta\sin.\theta\cos.\frac{p\sin.\zeta + b\cos.\zeta}{a\sin.\zeta} + b\cos.\zeta\cos.\theta + \frac{b\,dv\cos.\zeta}{dt\sin.\zeta\sqrt{v}}$. Exprimat $g$ ſtatum compreſſionis in altero termino E, vbi $s = 0$ erit

$$g\cos.\zeta = a\cos.\zeta\sin.\theta\cos.\frac{p\sin.\zeta + b\cos.\zeta}{a\sin.\zeta} + b\cos.\zeta\cos.\theta + \frac{b\,dv\cos.\zeta}{dt\sin.\zeta\sqrt{v}} - a\cos.\zeta\sin.\theta\cos.\frac{p}{a}$$

ſiue per coſ. $\zeta$ diuidendo:

$$g = a\sin.\theta\cos.\frac{p\sin.\zeta + b\cos.\zeta}{a\sin.\zeta} - a\sin.\theta\cos.\frac{p}{a} + b\cos.\theta + \frac{b\,dv}{dt\sin.\zeta\sqrt{v}}$$

Totum ergo negotium huc redit, vt ſtatus compreſſionis aquae in termino E definiatur, qui cum a profunditate orificii E, ſub aqua pendeat, reperitur puncti E altitudo ſuper centro $C = a\cos.\frac{p}{a}\sin.\theta$, ideoque profunditas orificii E ſub aqua erit $= c - a\sin.\theta\cos.\frac{p}{a}$. Cum igitur celeritas aquae in helicem influentis ſit debita altitudini $v$, ſtatus compreſſionis aquae in E aeſtimari debet per altitudinem $c - a\sin.\theta\cos.\frac{p}{a} - v$, vnde habemus:

$$c = a\sin.\theta\cos.\frac{p\sin.\zeta + b\cos.\zeta}{a\sin.\zeta} + b\cos.\theta + \frac{b\,dv}{dt\sin.\zeta\sqrt{v}} + v$$

Ponatur angulus $ACE = \Phi$, vt ſit $p = a\Phi$ et $dt = \frac{-a\,d\Phi}{\sqrt{k}}$ tum vero ſit angulus $\frac{b\cos.\zeta}{a\sin.\zeta} = \gamma$, ſeu $b = a\gamma\,\text{tang.}\zeta$, erit $c = a\sin.\theta\cos.(\Phi + \gamma) + a\gamma\,\text{tang.}\zeta\cos.\theta - \frac{\gamma\,dv\sqrt{k}}{d\Phi\cos.\zeta\sqrt{v}} + v$

Ponamus $2\sqrt{kv} = z$ vt ſit $v = \frac{zz}{4k}$, habemus:

$$-\gamma dz + \frac{zzd\Phi\,\text{coſ.}\,\zeta}{4k} + ad\Phi\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,(\Phi+\gamma) = d\Phi\,(c\,\text{coſ}\,\zeta - a\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta)$$

Ex qua aequatione valor ipſius $z$ definiri debet.

Quod autem ad preſſionem aquae ad latera tubi attinet, quatenus inde motui gyrationis reſiſtitur, ſupra vidimus a grauitate aquae oriri vim ſecundum $Zr = \text{ſin.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}$ Tab. II. Fig. 3. $\frac{p+s}{a} + \text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta$, vnde oritur vis ſecundum $Zv = \text{ſin.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{ſin.}\,\frac{p+c}{a} + \text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta$, quae per elementum aquae $= \frac{bbds}{\text{coſ.}\,\zeta}$ et radium $a$ multiplicata dat momentum elementare motui reſiſtens, vnde totum momentum erit

$$abb\left(b\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta + \frac{a\,\text{ſin.}\,\zeta^2\,\text{ſin.}\,\theta}{\text{coſ.}\,\zeta}(\text{coſ.}\,\Phi - \text{coſ.}\,(\Phi+\gamma))\right)$$

tantum ergo momentum $a$ vi gyrante ſuperari debet.

## COROLL. 1.

41. Pendet ergo determinatio motus aquae per cochleam Archimedis a reſolutione huius aequationis differentialis:

$$-\gamma dz + \frac{zzd\Phi\,\text{coſ.}\,\zeta}{4k} + ad\Phi\,\text{coſ.}\,\zeta\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,(\Phi+\gamma) = d\Phi\,(\text{coſ.}\,\zeta - a\gamma\,\text{ſin.}\,\zeta\,\text{coſ.}\,\theta)$$

vel ob $\gamma = \frac{b\,\text{coſ.}\,\zeta}{a\,\text{ſin.}\,\zeta}$ iſtius aequationis

$$-\frac{bdz}{a\,\text{ſin.}\,\zeta} + \frac{zzd\Phi}{4k} + ad\Phi\,\text{ſin.}\,\theta\,\text{coſ.}\,(\Phi+\gamma) = d\Phi\,(c - b\,\text{coſ.}\,\theta)$$

quae cum pluribus difficultatibus ſit obnoxia, patet theoriam Cochleae Archimedis maxime eſſe arduam.

COR.

## C O R O L L. 2.

42. Si cochlea in quiete relinquitur, vt ſit $k = 0$, loco elementi $d\Phi$ expedit in calculo relinqui elementum temporis $dt$ et ob angulum $\Phi$ conſtantem habebitur:

$$\frac{b\,dv}{dt\,\mathrm{ſin.}\,\zeta\,\sqrt{v}} + v = c - b\,\mathrm{coſ.}\,\theta - a\,\mathrm{ſin.}\,\theta\,\mathrm{coſ.}(\Phi+\gamma)$$

vnde mox naſcetur motus vniformis, $v = c - b\,\mathrm{coſ.}\,\theta - a\,\mathrm{ſin.}\,\theta\,\mathrm{coſ.}(\Phi+\gamma)$ quo aqua per cochleam fluet, ſiquidem ſit $c > b\,\mathrm{coſ.}\,\theta + a\,\mathrm{ſin.}\,\theta\,\mathrm{coſ.}(\Phi+\gamma)$

## C O R O L L. 3.

43. Si cylindrus in ſitu verticali ſit poſitus ob $\theta = 0$ erit $-\frac{b\,dz}{a\,\mathrm{ſin.}\,\zeta} + \frac{zz\,d\Phi}{4k} = d\Phi(c-b)$; vnde fit $d\Phi = \frac{4bk\,dz}{(4k(b-c)+zz)a\,\mathrm{ſin.}\,\zeta}$ et integrando $\frac{a\Phi\,\mathrm{ſin.}\,\zeta}{4bk}\sqrt{4k(b-c)} = \mathrm{A\,tang.}\,\frac{z}{\sqrt{4k(b-c)}}$, vbi eſt $\sqrt{v} = \frac{z}{\sqrt{4k}}$. Cum autem, ſi initio fuerit $\Phi = 0$ et $z = 0$, labente tempore angulus $\Phi$ euadat negatiuus, perſpicuum eſt, valorem quoque ipſius $z$ prodire negatiuum; ideoque hoc caſu aqua non aſcendet, ſed deſcendet, quod quidem per ſe eſt euidens.

## C O R O L L. 4.

44. In caſu autem coroll. praec. quo $b > c$, eiusmodi conſtantem addi oportet, vt poſito $\Phi = 0$ fiat $\sqrt{v} = \frac{z}{\sqrt{4k}} = \mathrm{coſ.}\,\zeta\sqrt{k}$, ſicque erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(b-c)}} = \mathrm{tang.}\left(\frac{\mathrm{coſ.}\,\zeta\,\sqrt{k}}{\sqrt{(b-c)}} + \frac{a\Phi\,\mathrm{ſin.}\,\zeta}{2b}\sqrt{\frac{b-c}{k}}\right)$; progreſſu autem temporis ſit $\Phi$ negatiuum, ideoque aſcenſus penitus ceſſat, cum ſit $-\Phi = \frac{2bk\,\mathrm{coſ.}\,\zeta}{a(b-c)\,\mathrm{ſin.}\,\zeta}$.

## S C H O L I O N.

45. Aſſumſi in huius caſus integratione, cochleam initio fuiſſe aqua repletam, ſubitoque rotari incepiſſe;

ſic enim vtique celeritas initialis aquae progreſſiua per cochleam ſit $= \cos. \zeta \sqrt{k}$. Sin autem ſtatus initialis ita concipiatur, vt obturato inferiori orificio cochlea in gyrum agatur, tum vero ſubito orificium iterum aperiri, aqua hoc momento ſeſe iam ad motum tubi accommodauerit neceſſe eſt, ita vt tum pro motus initio futurum ſit $v = o$. Hanc ergo ob rem aqua ſtatim deſcendere incipiet, neque vlla eius gutta ſupra eiicietur, ſiquidem ſit $b > c$. Quanquam autem hunc caſum quo $\theta = o$ feliciter expedire licuit, tamen pro ſitu cochleae inclinato, nihil admodum ex aequatione inuenta elicere licet, ſed natura motus aquae his caſibus nobis abſcondita manet, propterea quod haec aequatio ad formulam Riccatianam referenda commode tractari nequit. Ex quo inſigne Analyſeos defectus exemplum agnoſcimus, quod machinae frequentiſſimo vſu maxime peruulgatae effectus pendeat a reſolutione huiuſmodi aequationis, cui artificia in Analyſi adhuc detecta non ſufficiant, qui caſus mihi adeo mirabilis eſt viſus, vt etiamſi in hac inueſtigatione ſcopum, quem mihi propoſueram, non attigerim, tamen hoc argumentum digniſſimum exiſtimauerim, quo Geometrarum vires ad id penitus expediendum incitarem, quo labore non ſolum maxima commoda in Mechanicam redundabunt, ſed etiam Analyſeos limites haud mediocriter promouebuntur.

DE

# DE APTISSIMA FIGVRA ROTARVM DENTIBVS TRIBVENDA.

AVCTORE
*L. EVLERO.*

Quando in machinis vna rota ab alia ope dentium mouetur duae res requiri ſolent, quibus ſatisfieri oportet:

Primo, vt, dum vna rota motu vniformi gyratur, alterius rotae motus pariter fiat vniformis.

Ac deinde, vt in mutua dentium actione nullus attritus oriatur.

Quibus conditionibus vt ſatisfiat, ſint A et B centra rotarum, quarum altera alteram ad motum concitet, ſintque EM et FM dentes, qui nunc in ſe mutuo agunt, puncto contactus exiſtente M. Tab. III. Fig. 2.

Ductis ad apices vtriusque dentis rectis AE et BF vocetur $AB = a$, angulus $BAE = \Phi$, et angulus $ABF = \psi$. Iam dum rota A vnam facit reuolutionem, altera rota B abſoluat $n$ reuolutiones, et ob vtriusque motus vniformitatem debet eſſe $d\psi = n d\Phi$.

Porro ex puncto contactus M ducantur ad axes ordinatae MP et MQ, itemque tangens communis SMRT, ac vocentur:

$AP = x$; $PM = y$; $BQ = t$; et $QM = u$.

tum demiſſo ex M ad AB perpendiculo MV erit

$$AV = x\,\text{coſ.}\,\Phi - y\,\text{ſin}\,\Phi\,;\quad MV = x\,\text{ſin.}\,\Phi + y\,\text{coſ.}\,\Phi$$

$$BV = t\,\text{coſ.}\,\psi + u\,\text{ſin.}\,\Phi\,;\quad MV = t\,\text{ſin.}\,\psi - u\,\text{coſ.}\,\psi$$

vnde obtinemus:

$$t\,\text{coſ.}\,\psi + u\,\text{ſin.}\,\psi = a - x\,\text{coſ.}\,\Phi + y\,\text{ſin.}\,\Phi$$

$$t\,\text{ſin.}\,\psi - u\,\text{coſ.}\,\psi = x\,\text{ſin.}\,\Phi + y\,\text{coſ.}\,\Phi$$

ex quibus aequationibus elicimus:

$$t = a\,\text{coſ.}\,\psi - x\,\text{coſ.}\,(\Phi+\psi) + y\,\text{ſin.}\,(\Phi+\psi)$$

$$u = a\,\text{ſin.}\,\psi - x\,\text{ſin.}\,(\Phi+\psi) - y\,\text{coſ.}\,(\Phi+\psi)$$

Deinde ob communem tangentem erit

$PR = \frac{-y\,dx}{dy}$ et $QS = \frac{-u\,dt}{du}$ indeque tang. $ARM = \frac{-dy}{dx}$ et tang. $BSM = \frac{-du}{dt}$

At cum ſit $ATM = ARM - \Phi = BSM + \psi$, erit tang. $(ARM - BSM) =$ tang. $(\Phi + \psi)$ ideoque

$$\text{tang.}\,(\Phi+\psi) = \left(-\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dt}\right) : \left(1 + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{du}{dt}\right)$$

Denique ne vllus fiat attritus, neceſſe eſt vt ſit arcuum ſumma $EM + FM =$ conſt. ſeu $\sqrt{(dx^2+dy^2)} + \sqrt{(dt^2+du^2)} = 0$, ideoque $dx^2 + dy^2 = dt^2 + du^2$. Hanc ob rem habebimus ſin. $(\Phi+\psi) = \frac{dy\,dt - dx\,du}{dx^2+dy^2}$ et coſ. $(\Phi+\psi) = \frac{-dx\,dt - dy\,du}{dx^2+dy^2}$

At vero eſt

$$dt = -n\,a\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\psi + (n+1)\,x\,d\Phi\,\text{ſin.}\,(\Phi+\psi) + (n+1)\,y\,d\Phi\,\text{coſ.}\,(\Phi+\psi) - dx\,\text{coſ.}\,(\Phi+\psi) + dy\,\text{ſin.}\,(\Phi+\psi)$$

$$du = n\,a\,d\Phi\,\text{coſ.}\,\psi - (n+1)\,x\,d\Phi\,\text{coſ.}\,(\Phi+\psi) + (n+1)\,y\,d\Phi\,\text{ſin.}\,(\Phi+\psi) - dx\,\text{ſin.}\,(\Phi+\psi) - dy\,\text{coſ.}\,(\Phi+\psi)$$

Ergo

Ergo illae aequationes praebent

$$(dx^2+dy^2)\text{ſin.}(\Phi+\psi)=-nad\Phi(dy\,\text{ſin.}\,\psi+dx\,\text{coſ.}\,\psi)$$
$$+(n+1)d\Phi(xdy-ydx)\text{ſin.}(\Phi+\psi)+(dx^2+dy^2)\text{ſin.}(\Phi+\psi)$$
$$+(n+1)d\Phi(xdx+ydx)\text{coſ}(\Phi+\psi)$$
$$(dx^2+dy^2)\text{coſ.}(\Phi+\psi)=nad\Phi(dx\,\text{ſin.}\,\psi-dy\,\text{coſ.}\,\psi)$$
$$-(n+1)d\Phi(xdx+ydy)\text{ſin}(\Phi+\psi)+(dx^2+dy^2)\text{coſ.}(\Phi+\psi)$$
$$+(n+1)d\Phi(xdy-ydx)\text{coſ.}(\Phi+\psi)$$

ſicque per $d\Phi$ diuidendo obtinemus has duas aequationes

$$\frac{na}{n+1}(dy\,\text{ſin.}\,\psi+dx\,\text{coſ.}\,\psi)=(xdy-ydx)\text{ſin.}(\Phi+\psi)$$
$$+(xdx+ydy)\text{coſ.}(\Phi+\psi)$$
$$\frac{na}{n+1}(dy\,\text{coſ.}\,\psi-dx\,\text{ſin.}\,\psi)=(xdy-ydx)\,\text{coſ.}\,(\Phi+\psi)$$
$$-(xdx+ydy)\,\text{ſin.}(\Phi+\psi)$$

vnde porro elicimus iſtas:

$$xdy-ydx=\frac{na}{n+1}(dy\,\text{coſ.}\,\Phi+dx\,\text{ſin.}\,\Phi)$$
$$xdx+ydy=\frac{na}{n+1}(dx\,\text{coſ.}\,\Phi-dy\,\text{ſin.}\,\Phi)$$

Hinc autem prodit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(n+1)y+na\,\text{ſin.}\,\Phi}{(n+1)x-na\,\text{coſ.}\,\Phi}=\frac{na\,\text{coſ.}\,\Phi-(n+1)x}{(n+1)y+na\,\text{ſin.}\,\Phi}$$

ideoque $((n+1)y+na\,\text{ſin.}\,\Phi)^2+((n+1)x-na\,\text{coſ.}\Phi)^2=0$, cui aequationi aliter ſatisfieri nequit, niſi ponendo

$$y=-\frac{na}{n+1}\,\text{ſin.}\,\Phi \quad\text{et}\quad x=\frac{na}{n+1}\,\text{coſ.}\,\Phi$$

vnde fit

$$u=\frac{a}{n+1}\,\text{ſin}\,\psi \quad\text{et}\quad t=\frac{a}{n+1}\,\text{coſ.}\,\psi$$

ſicque prodirent duae rotae dentibus deſtitutae: ac propter ea fieri nequit, vt vtrique conditioni praeſcriptae ſatisfiat.

Quodſi ergo alteram conditionem attritus negligamus peruenjemus ad hanc aequationem vnicam:

$$\left.\begin{array}{l} -nad\Phi(dy\,\text{ſin.}\,\psi+dx\,\text{coſ.}\,\psi)\text{coſ.}(\Phi+\psi)+(n+1)d\Phi(xdy-ydx) \\ \text{ſin.}(\Phi+\psi)\text{coſ.}(\Phi+\psi)+(n+1)d\Phi(xdx+ydy)\text{coſ.}(\Phi+\psi)^2 \\ -nad\Phi(dx\,\text{ſin.}\,\psi-dy\,\text{coſ.}\,\psi)\text{ſin.}(\Phi+\psi)-(n+1)d\Phi(xdy-ydx) \\ \text{ſin.}(\Phi+\psi)\text{coſ.}(\Phi+\psi)+(n+1)d\Phi(xdx+ydy)\text{ſin.}(\Phi+\psi)^3 \end{array}\right\}=0$$

$$\text{ſeu}\ \frac{na}{n+1}(dx\,\text{coſ.}\,\Phi-dy\,\text{ſin.}\,\Phi)=xdx+ydy$$

Data ergo pro lubitu aequatione inter $x$ et $y$, hinc tam $x$ quam $y$ per angulum $\Phi$ exprimi poterit, indeque determinabitur ſimul altera curua inter $t$ et $u$.

Quoniam autem fieri nequit, vt motus vtriusque rotae reddatur vniformis, ſimulque attritus in contactu dentium mutuo euitetur, videndum eſt, vtri harum duarum conditionum potius ſatisfieri conueniat, altera neglecta. Ac primo quidem, quod ad attritum attinet, dubium eſt nullum, quin omnis generis machinae, quae rotis impelluntur, inſigne perfectionis augmentum eſſent accepturae, ſi dentes ita efformarentur, vt ſine vlla frictione ſe mutuo impellerent, ſicque motus hinc nullum impedimentum pateretur. Praeterea vero ipſi rotarum dentes attritu mutuo ſublato, multo diutius ſalui manerent, ſuamque figuram conſeruarent, cum contra ſi attritus adſit, continuo aliquantillum a dentibus abraditur, vnde eorum figura tandem immutabitur, ita vt ſi dentes initio ad alterum requiſitum fuerint accommodati, ii tandem ne huic quidem amplius ſint ſatisfacturi, ſicque machina omnibus commodis ex hac conditione oriundis priuetur.

Dein-

Deinde tamen eiuſmodi dantur machinae, in quibus vniformitas motus multo maioris eſt momenti, quam frictionis ſublatio. Quae enim machinae ad inſigne quoddam opus perficiendum ſunt deſtinatae, plurimum intereſt, eas ita inſtruxiſſe, vt tota vis, qua impelluntur, ad hoc opus abſoluendum impendatur, nullaque eius vis portio in motu machinae conſeruando conſumatur. Quodſi autem omnes machinae partes, dum opus propoſitum exequitur, motu vniformi feruntur, huius motus conſeruatio nulla vi indiget; ſicque tota vis effectui propoſito integra relinquitur, quamobrem iſtius modi machinas ita inſtrui conueniet, vt omnes partes, quibus ſunt compoſitae, motu vniformi commoueantur.

Hinc quando rotae aliae ab aliis ope dentium ad motum impelluntur, neceſſe eſt, vt dum rotae primae motus eſt vniformis, cuiusque reliquarum, quae ab illa cientur, motus pariter vniformis euadat. Si enim qua rota modo celerius, modo tardius gyretur, ſemper vis quaedam ad hunc motum ſiue accelerandum, ſiue retardandum requiritur, cuius iactura effectus, ad quem machina eſt accommodata, diminuitur: atque haec diminutio plerumque multum ſuperare ſolet eam, quae forte ab attritu dentium oriri poſſet. Quare his caſibus, cum dentibus eiuſmodi figura tribui nequeat, vt ſimul motus vniformitas obtineatur, et frictio tollatur, omnino expedit leuem dentium attritum admitti, dummodo omnium rotarum motus aequabilis efficiatur; ſiquidem illud incommodum hoc commodo largiter compenſatur.

Quae autem machinae ita ſunt comparatae, vt non ad onus quodpiam eleuandum, aliudue opus exequen-

quendum ſint deſtinatae, ſed potius ſui motus aequabilitate ſcopo intento ſatisfaciant, cuiusmodi ſunt omnis generis horologia, quae motus ſui aequabilitate temporis menſuras continere ſolent, in his, quoniam nulla reſiſtentia ſuperanda proponitur, ratio modo memorata penitus ceſſat. Quin etiam motus aequabilis, ſi omnibus partibus conciliaretur, potius ſcopo propoſito aduerſaretur, quam faueret. Cum enim in his machinis nullum onus ſuperandum adſit, in quo actio vis motricis conſumatur, ab ea ipſe machinae motus continuo augeretur, motusque iam impreſſus a continua vis impellentis ſollicitatione perpetuo acceleraretur, ſiquidem ſingularum partium motus quouis momento eſſet aequabilis; cum nihil obſtaret, quo minus is a noua potentiae impulſione celerior redderetur.

Hanc ob rem horologiorum ſtructura data opera ita attemperari ſolet, vt quouis momento motus, quem quaeuis pars iam conceperat, iterum intereat, ſingulisque momentis machina, quaſi de nouo, ad motum concitari debeat. Ita fit vt dummodo machinae ſingulis momentis par motus imprimitur, motus totalis, qui inde reſultat, aequabilis videatur, ſiquidem illa momenta ſatis fuerint exigua, vt inaequalitas, quae in vnoquoque exiſtit, percipi nequeat. Ita motus ad aequabilitatem totalem obtinendam moderatio, vel ope penduli, vel alius motus reciproci effici ſolet, dum quauis oſcillatione vnus dens rotae dentatae propellitur; hocque pacto cum oſcillationes ſint iſochronae, aequalibus temporibus aequalis dentium numerus propellitur, vnde in rotis lentioribus motus quaſi vniformis exoritur; qui tamen re vera ita eſt

com-

comparatus, vt ſingulis oſcillationibus ex ſtatu quietis de nouo producatur. Cum igitur in horologiis nullius rotae motus ſit continuus et vniformis, nulla quoque ratio vrget, dentes rotarum ita efficere, vt motus angularis rotae impulſae ad motum angularem rotae impellentis, quouis inſtanti, datam teneat rationem, ſed ſufficit, dum vnusquisque dens rotae impellentis vnum dentem rotae impulſae promoueat. Quocirca his rotis omnis perfectionis gradus, cuius ſunt capaces, conciliabitur, ſi dentes ita efformentur, vt eorum actio mutua nullam patiatur frictionem: ſic enim dentes diutiſſime debitam figuram ſuam conſeruabunt, in quo eximia horologiorum virtus continetur.

Hinc ergo duplicis generis rotas dentatas obtinemus: alterum, quo rotae ſe mutuo ſine frictione ad motum impellunt, alterum vero, quo, ſi rotae impellentis motus fuerit vniformis, ſimul rotae impulſae motus efficitur vniformis. Quemadmodum ergo dentes in vtroque rotarum genere efformatos eſſe oporteat, ex formulis ante exhibitis indagabo.

## I.

## DE ROTIS, QVAE SE MVTVO SINE DENTIVM FRICTIONE IMPELLVNT.

1. Cum igitur in his rotis vniformitas motus locum non habeat, ſeu motus angularis vnius, ad motum angularem alterius, rationem non teneat conſtantem, quantitas $\frac{d\psi}{d\phi} = n$ non erit conſtans, ſeu $n$ quantitatem variabilem denotabit. Hoc autem non obſtante eaſdem,

quas ſupra, obtinebimus formulas, ſcilicet $y = \frac{-na}{n+1}$ ſin $\Phi$; et $x = \frac{na}{n+1}$ coſ. $\Phi$ itemque $u = \frac{a}{n+1}$ ſin. $\psi$ et $t = \frac{a}{n+1}$ coſ. $\psi$, hoc tantum diſcrimine, quod hic $n$ non denotet numerum conſtantem, ſed eius loco ſcribi debeat fractio variabilis $\frac{d\psi}{d\Phi}$, ita vt ſit

| pro curua dentis EM | pro curua dentis FM |
| --- | --- |
| $x = \frac{ad\psi}{d\Phi + d\psi}$ coſ $\Phi$ | $t = \frac{ad\Phi}{d\Phi + d\psi}$ coſ. $\psi$ |
| $y = \frac{-ad\psi}{d\Phi + d\psi}$ ſin. $\Phi$ | $u = \frac{ad\Phi}{d\Phi + d\psi}$ ſin. $\psi$ |

2. Cuiusmodi autem ex his formulis vtriusque dentis EM et FM debeat eſſe figura, ſequenti modo colligo. Primo obſeruo, ductis ad commune punctum contactus M rectis AM et BM, fore

$$AM = \frac{ad\psi}{d\Phi + d\psi} \text{ et } BM = \frac{ad\Phi}{d\Phi + d\psi}$$

Hinc ergo erit $AM + BM = a = AB$, vnde patet punctum contactus M ſemper in recta AB centra rotarum iungente reperiri, et ob hanc rationem angulos AMT et BMT eſſe deinceps poſitos. Praeterea ob inceſſum dentium ſine frictione, quantum arcus EM creſcit, tantum dens arcus FM decreſcere debet.

Tab III. Fig. 3. 3. Ponamus ergo rotae circa A mobilis dentium figuram eſſe $CMm$, rotae vero alterius circa B mobilis $CNn$, atque contactus iam erit in ipſo puncto C. Capiantur vtrinque arcus aequales $CM = CN = s$, et cum motu angulari prioris rotae punctum M peruenit in rectam AB, ſimul alterius rotae punctum N peruenire debet in eandem rectam AB, ita vt dum illa rota motu ſuo conficit angulum CAM, haec rota moueatur per angulum CBN. Ponatur ergo angulus

CAM

CAM $=\Phi$ et angulus CBN $=\psi$, Tum vero, quia puncta *M* et N in contactum peruenient in recta AB, oportet, vt ſit tam AM+BN=AB=$a$, quam ſumma angulorum AMC+BNC= duobus rectis.

4. Ad hoc ponatur AM $=v$ et BN $=z$, eritque primo $v+z=a$: deinde ob aequalitatem arcuum CM=CN, erit $\int\sqrt{(dv^2+vvd\Phi^2)}=\int\sqrt{(dz^2+zzd\psi^2)}$, ideoque ob $dz=-dv$, fiet $vd\Phi=zd\psi=(a-v)d\psi$. Porro eſt tang. AMC $=\frac{vd\Phi}{dv}$, et tang. BNC $=\frac{zd\psi}{dz}$: vnde ob AMC+BNC=2 rectis, neceſſe eſt, vt ſit $\frac{vd\Phi}{dv}=-\frac{zd\psi}{dz}$, quae aequatio, ob $dz=-dv$, redit ad ſuperiorem $vd\Phi=zd\psi$. Ita data curua CM per aequationem inter CAM $=\Phi$ et AM $=v$, pro altera curua CN haec habebitur aequatio inter CBN $=\psi$ et BN $=z$, vt ſit $z=a-v$ et $d\psi=\frac{vd\Phi}{a-v}$ ſeu $\psi=\int\frac{vd\Phi}{a-v}$, vnde haud difficulter conſtructio idonea eruitur.

5. Verum hic ingens incommodum occurrit, quo huiusmodi dentes ad praxin plane inutiles redduntur, cum enim altera rota, puta A, ab altera B moueri debeat, manifeſtum eſt, hoc fieri non poſſe, niſi vbi angulus AMC eſt obtuſus; tum enim contactu exiſtente in MN, rotae A punctum *M*, *à* rotae puncto N deprimetur; ſin autem angulus AMC eſſet vel rectus, vel adeo acutus, rota B nullam plane vim exereret in rotam *A*, illaque motum aliquantillum proſequi poſſet, cum tamen haec non ſequatur. Cum igitur dentium natura non permittat, vt angulus AMC vbique ſit obtuſus, euidens eſt, fieri non poſſe, vt hoc modo rota alia ab alia ad motum incitetur. Quin etiam cum mu-

tuus contactus neceſſario in recta AB contingere debeat, per nouum contactum, quo dentes alibi in ſe mutuo agere inciperent, motus rotae A conſeruari nequit: quam ob cauſam huius generis dentes ad praxin plane ſunt inepti. Cum igitur iſtius modi dentes ad horologia accommodati ſint viſi, manifeſtum eſt, ne hic quidem frictionem in dentium actione mutua tolli poſſe, ita vt et in huius generis machinis conſultum ſit dentes adhibere, quae altero commodo gaudeant, et motum rotae impulſae quoque vniformen reddant, ſiquidem motus rotae impellentis fuerit vniformis.

## II.

## DE ROTIS QVAE MOTV VNIFORMI SE MVTVO PROPELLVNT.

6. Pro hoc ergo caſu cum $d\Phi$ ad $d\psi$ ſemper eandem rationem tenere debeat, ſi ponatur $d\psi = n d\Phi$, angulus $\Phi$ ita a figura dentis EM pendet, vt ſit

$$\frac{na}{n+1}(dx \operatorname{coſ.} \Phi - dy \operatorname{ſin.} \Phi) = x dx + y dy$$

quo inuento, figura dentis alterius rotae ita definietur, vt ſit:

$$t = a \operatorname{coſ.} \psi - x \operatorname{coſ.} (\Phi + \psi) + y \operatorname{ſin} (\Phi + \psi)$$
$$u = a \operatorname{ſin.} \psi - x \operatorname{ſin.} (\Phi + \psi) - y \operatorname{coſ.} (\Phi + \psi)$$

vnde ſimili modo fit:

$$\frac{a}{n+1}(dt \operatorname{coſ.} \psi + du \operatorname{ſin.} \psi) = t dt + u du$$

Data ergo figura dentium rotae A, inde angulus $\Phi$ per $x$ et $y$ definiri debet, tum poſito $\psi = \alpha + n\Phi$, ſimul aequatio obtinebitur pro figura dentium alterius rotae B.

Quo-

7. Quoniam in dente FM rectam BF, ad quam, tanquam axem, figuram dentis referimus, pro lubitu accipere licet, vnde angulus ABF data quantitate vel augetur, vel diminuitur, hanc rectam BF ita ductam concipiamus, vt $\alpha$ euaneſcat, ſitque perpetuo $\psi = n\Phi$. Deinde ſit $\frac{na}{n+1} = b$ et $\frac{a}{n+1} = c$, vt habeatur $a = b + c$. His poſitis erit

$$b(dx \operatorname{coſ.} \Phi - dy \operatorname{ſin.} \Phi) = xdx + ydy$$

$$t = a \operatorname{coſ.} n\Phi - x \operatorname{coſ.} (n+1)\Phi + y \operatorname{ſin.} (n+1)\Phi$$

$$u = a \operatorname{ſin.} n\Phi - x \operatorname{ſin.} (n+1)\Phi - y \operatorname{coſ.} (n+1)\Phi$$

vnde conficitur

$$c(dt \operatorname{coſ.} n\Phi + du \operatorname{ſin.} n\Phi) = tdt + udu.$$

8. Ponamus $dy = -dx \operatorname{tang.} \theta$, ſeu $\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{ſin.} \theta}{\operatorname{coſ.} \theta}$, fietque $b(\operatorname{coſ.} \theta \operatorname{coſ.} \Phi + \operatorname{ſin.} \theta \operatorname{ſin.} \Phi) = x \operatorname{coſ.} \theta - y \operatorname{ſin.} \theta = b \operatorname{coſ.} (\theta - \Phi)$ et differentiando aequationem $y = \frac{x \operatorname{coſ.} \theta}{\operatorname{ſin.} \theta} - \frac{b \operatorname{coſ.} (\theta - \Phi)}{\operatorname{ſin.} \theta} - \frac{dx \operatorname{ſin.} \theta}{\operatorname{coſ.} \theta}$ $= \frac{dx \operatorname{coſ.} \theta}{\operatorname{ſin.} \theta} - \frac{x d\theta}{\operatorname{ſin.} \theta^2} + \frac{b(d\theta - d\Phi) \operatorname{ſin} (\theta - \Phi)}{\operatorname{ſin.} \theta} + \frac{bd\theta \operatorname{coſ.} (\theta - \Phi) \operatorname{coſ.} \theta}{\operatorname{ſin.} \theta^2}$ quae reducitur ad hanc

$$0 = dx - \frac{x d\theta \operatorname{coſ.} \theta}{\operatorname{ſin.} \theta} + \frac{bd\theta \operatorname{coſ.} \theta \operatorname{coſ.} \Phi}{\operatorname{ſin} \theta} - bd\Phi \operatorname{coſ.} \theta \operatorname{ſin.} (\theta - \Phi)$$

Diuidatur per $\operatorname{ſin.} \theta$, et integretur: ſicque prodibit

$$0 = \frac{x}{\operatorname{ſin.} \theta} + b\int \frac{d\theta \operatorname{coſ.} \theta \operatorname{coſ.} \Phi}{\operatorname{ſin.} \theta^2} - b\int \frac{d\Phi \operatorname{coſ.} \theta \operatorname{ſin.} (\theta - \Phi)}{\operatorname{ſin.} \theta} \text{ ſeu}$$

$$0 = \frac{x - b \operatorname{coſ.} \Phi}{\operatorname{ſin.} \theta} - b\int d\Phi \operatorname{coſ.} (\theta - \Phi) \text{ ita vt ſit}$$

$$x = b \operatorname{coſ.} \Phi + b \operatorname{ſin.} \theta \int d\Phi \operatorname{coſ.} (\theta - \Phi) \text{: atque hinc oritur}$$

$$y = -b \operatorname{ſin.} \Phi + b \operatorname{coſ.} \theta \int d\Phi \operatorname{coſ.} (\theta - \Phi)$$

Sumto ergo angulo $\theta$ pro lubitu ratione anguli $\Phi$, innumerabiles figurae pro dente EM obtinebuntur.

9. Aſſumta autem quapiam figura pro dente EM, quae ex certa quadam relatione angulorum $\theta$ et $\Phi$ ori-

tur, conueniens figura pro dente FM alterius rotae B ita definietur, vt ſit

$$t = a\,\text{coſ.}\,n\Phi - b\,\text{coſ.}\,n\Phi + b\,\text{ſin.}((n+1)\Phi - \theta)\int d\Phi\,\text{coſ.}(\theta - \Phi)$$
$$u = a\,\text{ſin.}\,n\Phi - b\,\text{ſin.}\,n\Phi - b\,\text{coſ.}((n+1)\Phi - \theta)\int d\Phi\,\text{coſ.}(\theta - \Phi)$$

ſiue ob $a = b + c$

$$t = c\,\text{coſ.}\,n\Phi + b\,\text{ſin.}((n+1)\Phi - \theta)\int d\Phi\,\text{coſ.}(\theta - \Phi)$$
$$u = c\,\text{ſin.}\,n\Phi - b\,\text{coſ.}((n+1)\Phi - \theta)\int d\Phi\,\text{coſ.}(\theta - \Phi)$$

Hinc ergo aliquot exempla percurramus.

## EXEMPLVM. 1.

10. Sit angulus $\theta = 0$; erit $\text{ſin.}\,\theta = 0$; $\text{coſ.}\,\theta = 1$; et $\text{coſ.}(\theta - \Phi) = \text{coſ.}\,\Phi$; vnde fit $\int d\Phi\,\text{coſ.}(\theta - \Phi) = \int d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \text{ſin.}\,\Phi + \mu$; denotante $\mu$ numerum quempiam conſtantem. Hinc pro figura dentis EM rotae A ſequentes prodibunt formulae:

$$x = b\,\text{coſ.}\,\Phi \quad \text{et} \quad y = \mu b$$

Pro alterius autem rotae B dente FM habebitur

$$t = c\,\text{coſ}\,n\Phi + b\,\text{ſin.}(n+1)\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi + \mu b\,\text{ſin.}(n+1)\Phi$$
$$u = c\,\text{ſin.}\,n\Phi - b\,\text{coſ.}(n+1)\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi - \mu b\,\text{coſ.}(n+1)\Phi$$

exiſtente $b = \frac{na}{n+1}$ et $c = \frac{a}{n+1}$; ideoque $b = nc$.

11. Quoniam vero dum iidem dentes in ſe mutuo agunt, angulus $\Phi$ non multum variatur, ideoque minimus manet, erit pro dente EM; $x = b - \frac{1}{2}b\Phi\Phi$ et $y = \mu b$, pro dente autem FM habebimus:

$$t = c(1 + \mu n(n+1)\Phi + \tfrac{1}{2}n(n+2)\Phi\Phi)$$
$$u = c(-\mu n + \tfrac{1}{2}\mu n(n+1)^2\Phi\Phi + \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)\Phi^3)$$
$$\text{vel}\; u = -c(\mu n - \tfrac{1}{2}\mu n(n+1)^2\Phi\Phi - \tfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)\Phi^3).$$

12. Vel

12. Vel ponatur latitudo $\mu b = \mu n c = e$, erit primo $x = b - \frac{1}{2} b \Phi\Phi$ et $y = e$ tum vero

$$t = c + (n+1) e \Phi + \tfrac{1}{2} n(n+2) c \Phi\Phi$$

$$u = -e + \tfrac{1}{2}(n+1)^2 e \Phi\Phi + \tfrac{1}{3} n (n+1)(n+2) c \Phi^3$$

vnde patet ſi $\Phi = 0$ fore $x = b$; $y = e$ et $t = e$, $u = -e$. Vbi cum valor ipſius $u$ prodeat negatiuus, cognoſcimus applicatam $u$ ſuper axe BF capi debere, quae proinde erit

$$u = e - \tfrac{1}{2}(n+1)^2 e \Phi\Phi - \tfrac{1}{3} n(n+1)(n+2) c \Phi^3$$

13. Vt autem longitudo dentium in vtraque rota determinetur, maximus angulus $\Phi$ ſpectari debet, ad quem ſi radius AC ad rectam AB inclinetur, dentes EM et FM ſe adhuc contingant. Notandum vero eſt, rotas ita inſtructas eſſe debere, vt antequam bini dentes ſe mutuo deſerant, ſequentes ſe mutuo arripiant, cui requiſito commodiſſime ſatisfit, ſi dum bini dentes in medio exiſtente $\Phi = 0$ in ſe inuicem agunt, bini proximi ſeſe arripere incipiant. Quodſi ergo in rota A diſtantia dentium angulo $= \alpha$ deſignetur, ita vt in rota B dentes angulo $= n\alpha$ diſtent, poſito $\Phi = \alpha$, dentium magnitudo vtrinque determinabitur. Interim tamen iuuabit, inciſiones aliquantum profundiores fieri, ne motus ex hac parte obſtaculum offendat.

14. Capiatur ergo in recta $AB = a$ centra rotarum iungente $AC = b = \frac{na}{n+1}$ et $BC = c = \frac{a}{n+1}$; et ex vtroque centro deſcribantur circuli CR et CS. Tum pro rota A ducatur $mp$ ipſi AC parallela ad diſtantiam $Cm = Gp = e$, erit $mp$ facies vnius dentis. Ad alteram vero rotam deſcribatur curua $af$ ex valoribus datis $t$ et $u$, quae verſus $mp$ erit conuexa. Porro pro dentium diſtantia in vtraque peripheria CR et CS Tab. III. Fig. 4.

aequa-

aequales abſcindantur arcus C$\mu$, $\mu\nu$, etc. et C$\varsigma$, $\varsigma\gamma$ etc. $= ba = nca$, ſimiliterque deſcribantur facies dentium $nq$ et $bg$; $or$ et $ch$ etc. Quo facto altitudo dentium in rota B ita determinabitur, vt ſecundus dens $bg$ tantum non dentem $nq$ apprehendat, ſic dabitur magnitudo dentis $bg$, cui aequalis eſſe debet $af$, atque hinc in rota A profunditas dentis $mp$ innoteſcet, quae aliquantillum ſuperare debet altitudinem $af$, ne in fundo $f$ contactus fiat, ſicque motus impediatur.

15. Quo autem rotae ſe mutuo quoque in alteram partem impellere queant, alterae dentium facies ſimili modo efformari debebunt, quae pro rota A erunt CG, $\mu\Phi$, $\nu\varrho$ etc. pro rota vero B, $a\int$, $\beta g$, $\gamma b$ etc. quarum iſtas pari curuatura praeditas eſſe oportet, atque alteras. Verum ne motus obſtaculum offendat, craſſitiem dentium rotae B ſcilicet $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, etc. aliquanto minorem eſſe oportet, quam amplitudinem interuallorum inter dentes alterius rotae G$p$, $\Phi q$, $\varrho r$ etc. Denique euidens eſt, in rota B dentes quoque aliquanto profundius exſcindi oportere: tum vero quoque conueniet dentes alterius rotae A aliquanto longiores fieri, ne vnquam contactus in ipſo eorum angulo $a$ eueniat.

## EXEMPLVM 2.

16. Ponamus eſſe $\theta = \Phi$ erit $\text{coſ.}(\theta - \Phi) = 1$ et $\int d\Phi\, \text{coſ.}(\theta - \Phi) = \Phi + \gamma$; ſicque erit

$$x = b\,\text{coſ.}\,\Phi + \gamma b\,\text{ſin.}\,\Phi + b\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi$$

$$y = -b\,\text{ſin.}\,\Phi + \gamma b\,\text{coſ.}\,\Phi + b\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi$$

tum vero porro ob $b = nc$

$$t = c\,\text{coſ.}\,n\Phi + n\gamma c\,\text{ſin.}\,n\Phi + nc\Phi\,\text{ſin.}\,n\Phi$$

$$u = c\,\text{ſin.}\,n\Phi - n\gamma c\,\text{coſ.}\,n\Phi - nc\Phi\,\text{coſ.}\,n\Phi$$

qui

qui caſus ideo videtur notatu dignus, quia pro vtraque rota ſimilis dentium prodit figura.

17. Ponatur $\gamma b = n\gamma c = e$, quae eſt quantitas arbitraria, et cum angulus $\Phi$ ſemper ſit minimus, erit pro figura dentium rotae A:

$$x = b(1 + \tfrac{1}{2}\Phi\Phi) + e\Phi(1 - \tfrac{1}{6}\Phi\Phi)$$
$$y = e(1 - \tfrac{1}{2}\Phi\Phi) - \tfrac{1}{3}b\Phi^3$$

Pro figura dentium autem rotae B habebitur:

$$t = c(1 + \tfrac{1}{2}nn\Phi\Phi) + ne\Phi(1 - \tfrac{1}{6}nn\Phi\Phi)$$
$$u = -e(1 - \tfrac{1}{2}nn\Phi\Phi) + \tfrac{1}{3}n^3c\Phi^3$$

Quemadmodum ergo coordinatae $x$ et $y$ ab angulo $\Phi$ et radio $b$ pendent, ita ſimiliter coordinatae $t$ et $u$ ab angulo $n\Phi$ et radio $c$ pendent.

18. Si conſtans $e$ eſſet $= o$, vterque dens deſineret in cuspidem inuerſam, acumine ſcilicet centrum rotae vtriusque reſpiciente; quae figura cum ſit inepta ad praxin, conſtans $e$ nihilo aequalis ſtatui nequit. Tantus ergo valor ipſi $e$ tribui debet, vt vtraque curua a cuspide liberetur, ideoque quando angulus $\Phi$ maximum obtinet valorem $\alpha$, vt $e$ ad $\alpha b$ ſeu $n\alpha e$ certam quampiam teneat rationem. Ne autem, angulum $\Phi$ tam affirmatiue, quam negatiue capiendo, vnquam idem valor ſiue pro $x$, ſiue pro $t$ recurrat, oportet, vt ſit $e > \alpha b$. Si enim idem valor recurreret, tum eidem abſciſſae gemina applicata conueniet, ideoque dentis curua ibi duplicem haberet ramum, quod praxi aduerſaretur.

19. Curuae autem his formulis contentae propius cognoſcentur ex ea conditione quod $\theta = \Phi$: ideoque tang. $\Phi = \frac{-dy}{dx}$: vnde patet tangentem in puncto contactus SMT rectae AB eſſe parallelum, ſeu angulum ATS $= o$, ex quo fit BST $= -n\Phi$, ideoque tang. $n\Phi$
Tab. III. $= \frac{du}{dt}$. Hinc aequatio $b(dx \text{coſ.} \Phi - dy \text{ſin.} \Phi) = xdx + ydy$
Fig. 2. abit in $\frac{b(dx^2 + dy^2)}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = b\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = xdx + ydy$: quae indicat curuam EM ex euolutione circuli radio BE $= b$ deſcripti enaſci, ſimilique modo figura FM eſt curua ex euolutione circuli radio BF $= c$ deſcripti nata.

Fig. 5. 20. Quodſi ergo centris A et B deſcribantur circuli CE et CF, ille radio AC $= b$, hic vero radio BC $= c$; ſumtisque arcubus aequalibus CE $=$ CF, circulus CE euoluatur in EM$e$, circulus CF autem in FM$ſ$, hae duae quidem curuae ſe mutuo in M tangent, verum hoc punctum contactus ſimul erit punctum interſectionis, ita vt ambo dentes ſe mutuo penetrare deberent. Hoc autem incommodum potiſſimum obſtat, cum ambae rotae fere ſunt aquales: at ſi altera rota AC ſit maxima, illa interſectio euaneſcit, puncto contactus M in ipſum punctum E abeunte.

Fig. 6. 21. Si ergo altera rota A praegrandis fuerit prae altera B, huius dentes CD, $cd$ commode per euolutionem circuli C$c$ deſcribi poterunt, dum dentes rotae magnae planae conſtituuntur, qui quidem ratione contactus ad minimum ſpatium M$l$ ſe extendent, recta M$l$ exiſtente ad rotae peripheriam normali. Ex diſtantia porro dentium minoris rotae C$c$, quae ex eorum

eorum numero determinatur, eorum magnitudo *cm* inde definietur, vt cum contactus dentium M eueniat in recta AB, dentes proximi *cd* tantum non dentes *m* arripiant, ne vnquam tres dentes ſimul agant. Tum vero magnitudine dentium CD et *cd* definita, tantae cauitates in maiori rota exſcindi debent, veluti MNOP, *mnop*, vt dentes rotae minoris capere valeant; atque etiam hos dentes profundius exſcindi oportebit, vt prominentiae dentium maioris rotae *Ml* excipi queant. Hinc denique craſſities dentium CE, *ce* determinabitur, vt in cauitatibus maioris rotae locum inueniant, alterisque faciebus ED, *ed* ſimilis figura tribuetur, vt rotarum motus pari modo in plagam oppoſitam conuerti queat.

22. Quando autem vſus poſtulat, vt ambae rotae non multum a ratione aequalitatis recedant, tum ob rationem allegatam figura dentium non per euolutionem circulorum deſcribere licet, ſed tum potius conueniet dentibus eiusmodi tribui figuras, quales in exemplo primo determinauimus, vbi facies dentium alterius rotae erant rectae. Simul autem hic notari conuenit, ſi rotae admodum fuerint inaequales, atque dentibus maioris rotae, ſecundum exemplum primum, tribuatur figura plana, tum quoque figuram dentium minoris rotae ita fore comparatam, vt earum euoluta ſit circulus radio $BC = e$ deſcriptus, ita vt hoc caſu ambo exempla exhibita conueniant.

23. Cum igitur exemplum primum ad omnes caſus ſit accommodatum, ne in eo quicquam incongrui

eueniat, conſtantem $e$ ita definiri oportet, vt dum angulus $\Phi$ per omnes valores, tam affirmatiuos, quam negatiuos, variatur, quamdiu iidem dentes in ſe mutuo agunt, punctum contactus continuo immutetur; quod vt eueniat, ſi $\alpha$ denotet maximum angulum, qui pro $\Phi$ ſtatui queat, neceſſe eſt, vt ſit $e > \frac{n(n+2)c\alpha}{n+1}, = \frac{n+2}{n+1}b\,\alpha$:

Tab. III. Fig. 7. Ita ſi ſit $AC = b$; $BC = c$, capiaturque $CD = e$, recta $DH$ ipſi $AC$ parallela exhibebit faciem dentis rotae $A$, quae vltra $D$ non porrigitur ob $x = b\,\text{coſ.}\,\Phi$ et $y = e$. Pro figura autem dentis $FDG$ alterius rotae $B$, poſitis $BQ = t$ et $QN = u$, erit

$$t = c + (n+1)e\Phi + \tfrac{1}{2}n(n+2)c\,\Phi\Phi$$
$$u = e - \tfrac{1}{2}(n+1)^2 e\Phi\Phi - \tfrac{1}{2}n(n+1)(n+2)c\,\Phi^3$$

vnde poſito $\Phi = \alpha$ terminus dentis $F$, poſito autem $\Phi = -\alpha$ alter terminus $G$ reperitur; hincque quouis caſu figura dentium facile delineabitur.

PHY-

# PHYSICA.

# ALKEKENGI CALYCE PROFVNDE DIVISO, FRVCTV SICCO.

Auctore

*IO. CHRISTIANO HEBENSTREIT.*

Quam rei herbariae cultoribus exhibeo plantae rarioris delineationem, omniumque partium, quibus exornatur, deſcriptionem, inter incognitas plane referendam non eſſe, ſub initium huius expoſitionis moneo. Attamen cum a nemine, quantum quidem mihi conſtat, perfecta et omnibus numeris abſoluta, proſtet, vel data ſit huius icon: non dubitaui curare ſedulo, quo vigens et florens planta, ſecundum omnes ſuas partes, naturali in magnitudine iuſtoque numero depingeretur, quas nunc breui commentatiuncula exponere et illuſtrare conſtitui.

De hiſtoria eius, pauca haec addere, neceſſarium mihi videtur. Ludouicus Feuillée, Sacerdos, Mathematicus et Botanicus Regis Galliarum, Acad. Reg. Scient. Paris. Correſpondens, in itinere ſuo, ab anno huius ſaeculi ſeptimo ad duodecimum ex mandato Regis in Americam meridionalem, et praecipue prouincias Chily et Peru ſuſcepto, primus eam inuenit, et in Ephemeridibus obſeruationum phyſicarum, mathematicarum et botanicarum, *Iournal des obſeruations phyſiques, mathematiques et botaniques*, in ſectione libri, quae inſcribitur: *Hiſtoi-*

*re des plantes medicinales, qui ſont le plus en vſage aux Royaumes de l' Amerique meridionale du Perou et du Chily*, quae Pariſiis MDCCXIV. 4. prodierunt, Tom. II. p. 724. tab. 16. delineatam ſiſtit, additis, fructuum viribus, quibus pollent in mouenda vrina et reliquarum eius partium deſcriptione. Vocat eam *Alkekengi amplo flore violaceo.* Cuilibet vero obiter tantum inſpicienti iſtam figuram, quam citauimus, offertur ab auctore noſtro planta exigua et cuius partes omnes, ea magnitudine, quam penes nos ſata ſi fuerit, conſequitur, multo minores ſunt, neque natiua ſua forma, quam habet, cum his conueniunt. Quid? quod, etiamſi hanc differentiam loci natalis, in quo planta inuenta et deſcripta eſt, diuerſitati forte adiudicare quis velit, neque flos, neque fructus, ſecundum omnes partes ſuas rite adumbrati, ibi ſiſtuntur. Negandum equidem non eſt, Cl. auctorem noſtrum, prolixa deſcriptione et copioſa partium dimenſione, ſupplendi ea, quae iconi deſunt, omnem operam adhibuiſſe: ſed ſuperfluum eſſe eiusmodi ſtudium, quo partes plantarum, quae tot modis vbique variant, operoſo labore in mala icone deſcribuntur, quilibet cognoſcit, praeſertim, cum quotidiana experientia conſtet, culturam et alia accidentia, minutias linearum ſaepiſſime permutare inſigniter, cum in his nihil perpetuum ſit. Audiamus nunc inuentoris huius plantae verba ipſa, et relationem, quam de ea litterarum monumentis conſignauit nobisque reliquit, et quam in latinum conuerſa ſermonem, hic adducere non ſuperfluum fore credidi.

„Plan-

„Plantam, refert, habere radicem albicantem, recta „deſcendentem, quinque vncias longam et ſeptem „lineas craſſam. Eo in loco, vbi caulis radici in- „naſcitur, plerumque ea bifida adparet, multis fibris ibi „prodeuntibus, quarum diameter varia magnitudine va- „riat. Ad tres quatuorue pedes excreſcit caulis rectus, „exterius quinqueſulcatus, laeuis et laete viridis, qui „interius vero cauus eſt. Foliorum petioli ex ipſis „caulium oriuntur ſulcis, tres vncias et dimidiam longi, „ad inſertionem plani, tres lineas lati et duas craſſi, „colore purpuraſcentes. Folia ipſa mediae magnitudinis „excreſcunt ad octo fere vncias in longum, et vncias „quinque in latum. Color eorum eſt laete viridis, et „caule glabritie ſunt inferiora, in ambitu dentata et „apice acuminata, coſta totum folium percurrit intenſe „viridis, ex qua multae aliae laterales exeunt ad „apices vsque extremos excurrentes. Ex ipſo caule, „ac ex alis foliorum, excreſcunt rami aliquot exigui, „minoribus longe foliolis ac in caule ſunt. In cacu- „mine horum prouenit pedunculus fere vncialis, florem „vnicum ferens. Iſte flos dilute caeruleus, maior eſt „reliquis ſpeciebus huius generis, in ambitu aequaliter „diuiſus et vndulato plicatus. In medio ipſius eſt ſtella „alba radiata, quatuor punctis violaceis exornata. Fi- „lamentis quinque inſiſtunt antherae flauae. Cingitur „flos calyce hypocrateriformi, ex cuius fundo exſurgit „piſtillum, corollam perforatam tranſiens. Poſt deflo- „reſcentiam piſtillum mutatur in fructum mollem, viri- „deſcentem, ſplendentem, multis ſeminibus rotundis

„at compreſſis refertum. Semina lineam longa et di„midiam lata ſunt, et includuntur veſica membranacea, „orta ex calyce expanſo.„ Hactenus Feuillée. Cum vero in hac, quam adduxi, vegetabilis deſcriptione, nonnulla deſiderentur quam maxime neceſſaria; copioſiorem, clariorem et vberiorem illius expoſitionem Illuſtris Linnaeus in Speciebus plantarum Holm. 1753. 8. pag. 181. cum orbe erudito communicauit. Contulimus vtramque, et Feuillei, et Linnaei, partium huius plantae definitionem et dimenſionem inuicem, et quae in planta florente notauimus momenta, illis adiicere neceſſarium eſſe putamus, neque ideo reprehendendus erit noſter conatus, praeſertim cum genus, ad quod noſtra planta amandanda eſt, ex pleniore et accuratiore partium omnium enumeratione conſtitui debeat. Ex Speciebus Linnaei huc transſcribere expoſitionem vereor, cum ſine dubio copia iſtius libri penes omnes ſit. En nunc ſuccinctam et plenam omnium partium commemorationem, quam ſuperiore aeſtate ad perfectiſſimam plantam compoſui. Planta eſt annua et fulcitur radice vnica fibroſo-tuberoſa, ad palmae altitudinem deſcendente, albida, vel potius luteſcente, cuius diameter digiti craſſitiem habet. Quem protrudit caulem erectum, is omnino ad tres quatuorque pedes et vltra excreſcit, praeſertim, ſi plantae nouellae, in areis, feneſtris obtectae, progerminatae, mature in bene ſtercoratam terram transferuntur, in quo cito conualeſcunt. Prima aeſtate laete viget et bimeſtri ſpatio, poſtquam ſata eſt planta, floret; frigus vero noctur-

nocturnum aduenientis autumni ferre non poteſt, quod, et eius incrementum, et fructuum maturationem valide cohibet. In iuniore planta folia adhaerent cauli quadrangulo, quatuor ſulcis extus conſpicuo, intus, poſtquam marceſcere incipit, ſuccorum motu intercepto, non quidem plenarie cauo, diſtantibus tamen medullae exſuccae lamellis ornato, alterna, in vtraque ſuperficie laeuia, oblonga, in circumferentia irregulariter dentata et ſinuata: apex folii eſt acuminatus, et pars inferior in petiolo aliquantum decurrit. Petioli coſta parte auerſa eminet, et viridi colore inſignitur, prona depreſſior, laeuis et purpuraſcens in foliis adultis eſt. Rami ipſi ad angulos acutos exſurgentes, recta equidem adſcendunt, poſtmodum brachiati quaquauerſum diſperguntur. Contendit Feuillée, extremitati ramuſculorum inſiſtere pedunculum vniflorum: ſed is potius lateraliter et paullo altius, ac ramulus et petiolus folii, ex ipſo caule enaſcitur, vnicum florem ſuſtinens. Circumueſtit florem calyx monophyllus, turgidus, quinquangularis et inferius quinque acuminibus, tanquam productionibus ſagittatis, conniuens, et qui ad fundum vsque quinquifidus eſt, cuius ſegmenta ſunt foliola cordato-oblonga, angulis compreſſis cohaerentia. Corolla eſt monopetala campanulata tubo breui, fere rotato, extus colore violaceo, intus albo, qui color in quinque maculas caeruleſcentes, flammulae inſtar ad tertiam corollae partem adſcendentes, continuatur. Macula quaelibet ſuperius in duo cornua definit, quorum quodque extremum, cum oppoſitae maculae cornu confluens, interius quinque maculas

culas profunde caeruleas et acuminatas effingit. Limbus corollae caeruleſcens eſt expanſus, leuiter in ambitu quinquifidus, laciniis emarginatis. Filamenta quinque ſtaminum inferius craſſa introrſum flexa et piloſa contegunt ouarium, tenuiora adſcendunt longitudine ſtyli, breuiora corolla. Antherae ſunt erectae et acuminatae, ante floreſcentiam caeruleae, poſt flauae, bilamellatae. Stylus longitudine ſtaminum ſtigmate craſſo, capitato. Fructus ab initio purpureo-violaceus, qui color cum incremento fructus minuitur, et in prouecta aetate fructus plane abeſt. Maturatur in calyce ſtraminei coloris, clauſo et dependente, fructus globoſus et ſiccus, tribus, quatuor et quinque loculis, vt plurimum tamen quatuor diſtinctus, tenui cortice tectus, fragili, nec regulariter dehiſcente ad loculos. Semina numeroſiſſima, plana et compreſſa, adhaerent thalamo ſcabro, pro loculamentorum numero vario.

Quae hactenus expoſitae ſunt fructificationis partes, cum ab Alkekengi generis proprietatibus et proportionibus aliquantum deflectant; dubios nos relinquunt, vtrum hanc plantam ad hoc idem genus, an ad aliud referamus? Celeberrimus ipſe Linnaeus, in Speciebus ſuis ſupra adlegatis p. 182, equidem noſtram plantam adiunxit Atropae ſeu Belladonnae aliorum: fatetur tamen, mediam eſſe inter Atropam et Phyſalidem, et differentias, quibus ab Alkekengi ſeparanda ſit, ibidem exponit. Quae tertia eſt Atropae ſpecies apud Linnaeum, ab omnibus Botanicis hucusque adnumerata eſt Alkekengi generi, cum habitus totius plantae, flos et fructus

ſructus cum eodem penitus conueniant. Rationem vero, cur ſeparauerit ab Alkekengi Linnaeus, eam eſſe ſcribit, quia ſolus calyx inter genera Atropae et Phyſalidis limites certos conſtituat, hancque ſpeciem illud certo euincere autumat. Conſideranda itaque eſt definitio generis Atropae, quam dedit in editione Generum quinta Holm. 1754. 8. n. 222. cuius calycem monophyllum quinquepartitum, gibbum, laciniis acutis perſiſtentem, eſſe adfirmat, cum antea in editione Generum ſecunda Lugd. Bat. 1742. no. 197, ſemiquinquifidum, gibbum; laciniis ouato-acutis, perſiſtentem, illum eſſe docuerat. Ex hiſce notis calycis, prout antea ex eo retuli, in planta conſpicuis, prae reliquis aliis ab eo penſitatis, Alkekengi numero exemit. Sunt tamen notae iſtae calycis Atropae Linnaei non tam determinatae eique ſolum propriae, quin non conueniant etiam Phyſalidis ſpeciebus nonnullis. Accedit et hoc, quod definitio calycis Phyſalidis, quam loco citato in Generibus no. 223. dedit, fere omnes iſtos characteres habeat, ac ſunt in noſtra, quam conſideramus, planta. Sed pergendum eſt ad alia, ne in vnica tantum nota haereamus, cum plura ſigna inueniantur adhuc, attentione noſtra et conſideratione digniſſima. Flos proceritati plantae conformis et forma ſua ſpectabili iucundus, corolla campaniformi, limbo magno in quinque lacinias aequales, haud profundas, diuiſo, quodammodo etiam plicato et vndulato, et tubo ſuo breui et recto, notas floris Alkekengi plures refert. In Belladonna flos ſemper irregulariter quinquifidus et tubo floris longiore,

quodam modo incuruato, conſpicitur. Si conſtans etiam iſtud ſignum foret, ſtamina nempe in flore noſtro ſuperius diſtantia, et eam ab Alkekengi genere ex parte abludentem efficeret, piſtillum tamen breue et ſtigma ſubrotundum, cum hoc iterum commune habet. Sed reſtat praecipua vegetabilis noſtri pars, fructus nempe, qui eſt bacca ſubgloboſa et calyce inflato contenta. Calyx iſte, quem iam ſuperius deſcripſi, vna cum acino ſuo, quem inuoluit, excreſcit, quam diu planta viget, et laciniis ſuis profundis, quae complanantur inferius, quinquangularem veſicam refert, ſuperius dehiſcentem, includentem fructum ſubrotundum, fragili et exſucco cortice tectum, quadrilocularem vt plurimum, tribus et quinque etiam loculis ſaepius praeſentibus, quibus in thalamo exaſperato, tot columnis, quot ſunt loculi, adhaerent ſemina plana et ſubrotunda, ſpadicei coloris, copioſiſſima. Quodſi nunc eas, quas hactenus expoſui, plantae partes, comparamus cum partibus Alkekengi Tourn. in quam plurimis notis cum iis conueniunt: neque repugnat calyx, vel veſica membranacea, nullo conſpicuo colore ſuperbiens, et quae ad fundum vſque quinquifida eſt, neque magnitudo floris in hac ſpecie ſingularis, neque ſtamina diſtantia, neque fructus exſuccus et aridus et ſaepius ex pluribus, quam binis, loculis conſtructus, cum in aliis generibus fructus loculamentis et partibus aliis ſaepius varient. Si comprobandus eſt praeſtantiſſimorum Botanicorum auſus, ſecundum quem varia genera, communibus fructificationis partibus inſtructa, licet in nonnullis accidentalibus diffe-

rant

ſant, ad idem genus naturale reducere ſtudent: quid impedit, quo minus coniungamus genus Belladonnae cum Alkekengi, cum in poſteriore genere nonnullae ſpecies illud expoſtulare videntur, notante illud Cl. Linnaeo in Speciebus. Sed relinquimus cuique pro arbitrio ſuo liberum, ad quodnam genus referre velit hanc noſtram plantam: an ad Atropam Linnaei, an ad Alkekengi Tourneſortii? Si tandem, quid nos de dubia hac planta ſtatuamus, ſententiam ferre iubemur, illam antiquo generi Alkekengi adnumerandam eſſe adſerimus, cum quo quam proxime, calyce, flore et fructu conuenit, quo in poſterum caueatur luxurians noua genera fingendi licentia, quae botanicam reddit difficillimam. Nominabimus itaque in poſterum:

*Alkekengi calyce profunde diuiſo, fructu ſicco.*

Si in plantis, quae alias non male conueniunt, communis vſus medicus vel oeconomicus valeret multum pro comprobando genere botanico: firmum etiam argumentum mutuare poſſemus ex Feuilleo, pertinere eam ad Alkekengi, cum deſcriptionem ſuam, quam ſupra adduximus, exorditur exponendo primum vires medicas, propter quas ab incolis Americae magni aeſtimatur et colitur. „Qui adficiuntur, inquit, doloribus„ calculi ſabuli, vel et iſchuria, mirum in modum leuan-„ tur ab iſtis malis, dum ad hanc plantam confugiunt.„ Fructus quatuor, vel quinque, digitis compreſſi, immit-„ tuntur in aquam communem, vel vinum album, et ex-„ hibito tali hauſtu, mirum eſt, quantum reficiantur ab„ eo aegroti, ſubmotis ſubito omnibus doloribus. Tali„ „modo

„modo in vſus ſuos conuertere norunt Indi hancce plan„tam indigenam.„ Eamdem virtutem fructus Alkekengi foliis geminis, exercere in noſtris regionibus, crebra experientia comprobauit, et omnibus conſtat, hos, dum recentes et maturi, ſoli, vel ſaccharo conſperſi, comeduntur, in ſuppreſſa vrina multum iuuare aegrotos.„

* * *

Appendicis loco relationem litterariam, quae huc pertinet, adponere non dubito. Prodeunt nempe iterum Norimbergae lingua germanica deſcriptiones plantarum medicinalium, quas in America collegit Feuillée et commentariolis illuſtrauit in libro a me ſuperius adducto. Cum per faſciculos emittatur liber, dum haec ſcribo, XVI tabulae proſtant et tres plagulae commentariorum, et tabula XVI, in qua ſaepius indicata planta noſtra delineatur, euulgata quoque eſt. Figurae omnes immutatae, prout apud auctorem Feuilleum reperiuntur, exhibentur eruditis; hinc Alkekengi iſtud, omnibus ſuis partibus, quale auctoris ſui erat, conſpicitur ibidem denuo.

## Fxplicatio Figurarum.

### Tab. IV. Fig. 1.

Ramum Alkekengi ſiſtit, in quo caulis ſulcati figuram, foliorum formam, pedunculorum exortum, florum euolutorum ſitus calycumque inapertorum facies poſſunt diſtingui.

Figura

Figura 2.

A. Florem integrum, et corollam, ab anteriori parte conſpiciendam exhibet.

*a. a. a. a. a.* Corollae margo quinquifidus, qualibet lacinia medio emarginata.

*b.* Filamenta, corolla breuiora, cum ſuis antheris.

*c. c.* Maculae profunde caeruleae circa fundum corollae.

B. Corolla ſecundum longitudinem cum calyce diſſecta, vt interna melius cognoſcantur.

*d.* Fundus corollae, qui principium fructus, transuerſim diſſecti, recondit.

*e.* Calycis foliola.

*f.* Stamina.

*g.* Limbus corollae.

C. Fructus maturus in calyce reconditus.

*b b. b. b. b.* Calycis foliola paullum a ſe reclinata, vt fructus intus contentus manifeſtior appareat.

*i.* Ipſe fructus, baccam imitans, lineis etiam, loculos indicantibus, diſtinctus.

D. Fructus per medium diſſectus transuerſim.

*l. l l. l* Quatuor thalami, ſcabri et ſpongioſi,
*m. m.* Semina ſuſtinentes.

Reliqua ex deſcriptione patent.

# THLASPI SILICVLIS ELLIPTICIS, FOLIIS LANCEOLATO LINEARIBVS INTEGERRIMIS.

Auctore
*IO. CHRISTIANO HEBENSTREIT.*

Complures plantae, haud vbique obuiae, ſuperiori ſaeculo ab rei herbariae cultoribus deſcriptae, iconibus quoque illuſtratae, ſi noſtris temporibus accuratius conſiderantur, et quae de iis proſtant relationes, ſi comparantur cum plantis ipſis, multa praeter ea oſtendunt nobis ſingularia illiſque propria momenta, quae habitum, formam et figuram diuerſarum earum partium clarius demonſtrant, quae vero ab eius inuentoribus, vel neglecta, vel non ſatis diſtincte indicata ſunt. Abſit vero quam longiſſime a nobis, dum haec adſerimus, vt inde indefeſſos labores, quos ſuſceperunt in ſe ampliſſimae ſcientiae plantarum promotores, taxare, vel deſpicere vellemus, forte tantum ideo, quia horum plantarum deſcriptiones, non ad eam normam iſtasque leges, quas ſanxit recentiorum Botanicorum auctoritas, vel arbitrium, compoſitae et confictae ſunt. Noſtrum potius erit, addere ea omnia, quae iure quodam, quo perfectior et clarior exiſtat plantae cognitio, deſiderari queunt ab rei herbariae amatoribus. His igitur rationibus impulſus, plantam quandam, a variis auctoribus in ſcriptis ſuis indi-

indicatam, et de qua etiam nonnullae imperfectae icones iam proſtant, denuo ad plantam viuam exacte delineatam, breui et concinna expoſitione declarandam mihi ſumſi. Prima illius notitia occurrit apud Fabium Columnam in Ecphraſi prima minus cognitarum noſtro coelo orientium ſtirpium, Romae 1606. 4. p. 279. tab. 277. fig. 2. nomine: Lithothlaſpi quartum carnoſo rotundo folio, vbi deſcriptio incompleta, neque omnes fructificationis partes indicans, et figura plantae minus bona, nec ad omnem eius habitum facta, exſtat. Poſt Columnam in Pinace ſuo eam adducit Caſparus Bauhinus, et p. 107: Thlaſpi paruum ſaxatile flore ſuaue rubente vocat. Indefeſſus plantarum ſua aetate detectarum collector, Iohannes Parkinſon, in Theatro botanico, quod Londini 1640 in folio edidit, Thlaſpi noſtrum bis expoſuiſſe videtur. Alterum, quod p. 843 ſine icone cum nomine C. Bauhini, iam adducto, recenſet, idem eſt, ac alterum, quod eadem pagina ſub titulo: Thlaſpi montanum carnoſo rotundo folio, cum icone, ex Columna depromta, habet. Moriſonus, qui poſt Bauhinorum tempora, omnes, quae modo inuentae erant plantae, ſummo ſtudio in vniuerſale corpus cogere ſtuduit, et noſtram quoque plantam in Hiſtoria plantarum vniuerſali Oxonienſi Part. II. Sect. III. tab. 18. fig. 29. habet, recepto Bauhini nomine et adpoſita Columnae deſcriptione, in paucis mutata, prout etiam icon plantae non multum a Columnae figura recedit. Hunc excipit ordine alter celebris quoque Anglus, et

cui multum debet ſcientia plantarum, quam ſcriptis ſuis egregie illuſtrauit, Ioannes Raius, qui aeque ac reliqui, quos hactenus adduximus auctores, in hiſtoria plantarum Tom. I. p. 833. n. 14. plantulam ſaepius nominatam, Caſp. Bauhini denominatione adducit, in Anglia quoque ſponte naſcentem, et exacta omnium partium deſcriptione exponit. Cum vero Thlaſpi illud in Gallia et Italia quoque variis in montibus creſcat, fieri aliter non potuit, quam vt Botanici, qui collegerunt horum regnorum plantas indigenas, illius quoque mentionem iniicerent, et cum aliis ſpeciebus huius generis enumerarent. Sic enim Iacobus Barrelier in opere poſthumo, quod inſcribitur: Plantae per Hiſpaniam Italiam et Galliam obſeruatae Pariſiis 1714. fol. p 38 n. 362. ic. 845: Thlaſpi montanum pingui folio, carneo flore, plana et cordata ſiliqua illud vocat. Creſcit vero, prout ſcribit, circa Monspelium. Adpoſita eſt nomini icon admodum parua, quae neutiquam plantam ſaepius memoratam repraeſentat, cum ipſius caules numeroſi ſint ſpicati, floribus oppoſitis, et ſiliqua, ſeparatim adpicta, ſit oris integris, in ſummo emarginata et ferme triangularis. Plures equidem Thlaſpi ſpecies habentur in iſto libro, etiam vmbellatae, et quae certe propius accedunt ad noſtram ſpeciem: ſed ſynonymum C. Bauhini allegatum, et ſtructura foliorum, quae cum noſtra conuenit, non permittit nos dubitare, auctorem forte aliam, ac noſtram, prae manibus habuiſſe ſpeciem, ad quam facta ſit eius figura. Celeberrimus Tilli in cata-

catalogo Horti Piſani, Florent. 1723. fol. p. 164. Thlaſpi illud quoque enumerat, retentis nominibus antiquorum. Et Io. Franciſcus Seguierius in plantis Veronenſibus, Veronae 1745, 8 editis, Vol. I. p. 37. Thlaſpi illud breuiſſimis ſic enumerat inter plantas patriae. „Summorum, inquit, montium rupes incolit, „e quibus inter petrarum rimas ſe promit cauliculus, in „plures ramos diuaricatus, cui ſunt in ſummitate flores „ſuaue rubentes vmbellatim poſiti. Creſcit in Baldo „monte.„ Nimis copioſum foret, ſi longa ſerie omnes auctores, qui huius plantae in ſcriptis ſuis mentionem faciunt, adducerem: attamen neceſſarium omnino eſſe iudico, etiam indicare ea, quae reperiuntur in Indice locupletiſſimo magni Boerhaauii de noſtro vegetabili adnotata. Dum enim ibidem Part. II. p. 7. plures ex ordine proponit Thlaſpi ſpecies, n. 6. illud quoque ſiſtit: ſtatuit autem inſimul, videri ſibi, ac ſi vix differat ſufficienter ab alia ſpecie huius generis, a Ioanne Bauhino deſcripta in Hiſtoria plantarum II. 927, et a Moriſono, in opere ſuperius adducto, denuo propoſita. Tandem tenor, quem hactenus ſeruauimus in enumerandis variis auctoribus, nos deducit ad recentiſſimum botanices ſcriptorem, illuſtrem Linnaeum, qui in Speciebus plantarum, Holm. 1753. 8. euulgatis Tom. II. p. 646. n. 4. noſtram plantam nomine: Thlaſpi ſiliculis ellipticis, foliis lanceolato-linearibus integerrimis, ex Sauvageſii Flora Monſpelienſi Hag. Com. 1751. 8. adducit, addito ſigno crucis, ſibi fa-

miliari, ſi plantas a ſe ipſo non ſufficienter diſquiſitas, vel ex imperfecto exemplari perluſtratas, aliorum perſcrutationi et diſquiſitioni commendat. Patet ergo, non fruſtraneum eſſe noſtrum ſtudium, ſi, quae nobis de hac planta cognouimus, vna cum icone exacta et ad viuam plantam facta, nunc exhibeamus botanophilis.

Ex ſemine exiguo, coloris punicei, progerminat in hortis noſtris et in terra ſabuloſa plantula, radice vnica ſuffulta, albida, fibrillis ex omni ambitu paucioribus prodeuntibus, et quae emittit cauliculos tenues, numero incertos, quatuor, quinque, plures, recta adſcendentes, ad ſpithamae altitudinem excreſcentes, interdum ſubrubellos, praeſertim tempore verno, quibus vtrimque adhaerent folia lanceolata, carnoſa, integerrima, alterna, breuiſſime petiolata, petiolis albicantibus, ſuperficie folii vtraque glauca, inferiora ſuperioribus ſunt maiora et craſſiora, et denſo numero plantam omnem inveſtiunt. In ſummitate caulis coaceruantur floſculi plurimi, vmbellam quaſi formantes antequam florent, qui comprehendunt in calyce tetraphyllo, in inferiore parte ſua gibbo, et deciduo, florem tetrapetalum regularem, colore ex albo et lineis rubris variegatum: color petalorum ad vnguem eſt roſeus, limbo expanſo albidiore et integro. Dum petala marceſcunt roſeus color ſenſim perit, et loco ejusdem lineae tantum rubrae conſpiciuntur. Filamenta ſunt ſex, cum antheris luteis, altitudine ſua inaequalia, duo ſcilicet breuiora

peta-

petalorum interſtitiis interſerta; ſtylus eſt breuis, capitatus, craſſiuſculus: quibus emarcidis, ſuccreſcit fructus, ſilicula nempe fere cordata et margine foliaceo ac crenato cincta, quae ſepto intermedio valuas non ſuperat longitudine; et partes ſiliculae maturae dehiſcentes, valuae nempe, ſunt nauiculares, pauca ſemina continentes. Hae notae characteriſticae, in planta noſtra praeſentes, effecerunt, vt ab omnibus auctoribus ad Thlaſpi genus relata fuerit, neque vllus mihi cognitus eſt, qui eamdem ab eo ſeparaſſet. Maior vero ambiguitas apud ſcriptores, dum ſpecies ſuas ordinant, reperitur, ſiquidem idem habitus creſcendi omnibus fere communis eſt, et in ſola capſularum figura et foliorum forma quaerendae ſunt differentiae conſtantes. Sed vt illud exacte fiat, omnes, vel certe plurimae ſpecies praeſentes diſquirendae ſunt, quo varietatum accidentales characteres inſimul pateſcant. Cum vero non facile omnes vna in horto quodam vigeant vel floreant: hinc ſingularium ſpecierum tantum conficiendae ſunt deſcriptiones, omnibus numeris abſolutae. Non dubitamus, fore tunc multas varietates, quae adhuc pro genuinis ſpeciebus habitae ſunt: nam coniecturam noſtram celeberrimi Boerhaauii confirmat adſertum quam euidentiſſime, dum ſtatuit, loco a nobis ſupra adlegato, noſtram ſpeciem vix differre multum ab ea, quae a Io. Bauhino Hiſt. II. p. 927. vocatur: Thlaſpi capſula cordata, peregrinum, et quae eſt primum Thlaſpi in Speciebus Linnaei p. 645, forte et hic non ſufficienter, datis characte-

racteribus ſpecificis, ab noſtro diſtinctum. Interea retinendum eſt nomen ſpecificum Linnaei in hac noſtra ſpecie, et ſi in poſterum copia nobis dabitur alterius ſpeciei, illam conferemus cum noſtra praeſente, notaturi omnes differentias, quas euidentes et certas in vtrisque ſpeciebus eſſe exiſtimamus. Nomen Columnae ſupra citatum, et quod noſtrae plantae adſcripſimus, tribuit Illuſt. Hallerus Hort. Goett. 1753. 8. p. 245. Lepidio foliis pulpoſis ſubrotundis antheris lateralibus. Sed cum in noſtra planta folia omnia ſint lanceolata et antherae filamentis impoſitae, neque tuba longa et craſſeſcens inueniatur, dubitatio ſuboritur, num eadem ſit, quam deſcripſimus.

* * *

*S*uperiori anno a Cel. Ludwigio Lipſia mihi nuntiabatur, prodiiſſe Londini 1756 4. librum inſcriptum: The natural hiſtory of Aleppo and parts adiacents by Alexander Ruſſell, in quo delineatum eſſe Tab. I. p. 33. plantam quam expoſuimus, et compellari: Thlaſpi orientale ſaxatile, flore rubente, foliis polygalae, petalis florum aequalibus. Tourn. Coroll. 15. Impoſſibile fuit adhuc impetrare hunc librum ex Anglia, hinc de figura et deſcriptione, ſi quae adpoſita eſt, iudicare minime valeo: attamen neceſſarium eſſe putaui, etiam allegare ſcriptorem recentiſſimum, qui huius plantae mentionem iniecit.

EXPLI-

## EXPLICATIO FIGVRARVM.

### Tab. V.

Fig. I. Integrae plantae habitum deſignat: adumbrauimus autem minorem tantum, ſatis accurate eum exprimentem, licet in horto in fruticulum ſoleat excreſcere, per aliquot annos perdurantem.

Fig. II. *a.* Florem integrum, prout cauli inſidere ſolet, in quo inferius calyx et expanſus petalorum limbus cognoſcitur.

*b.* idem a latere viſus, quo calycis foliola melius dignoſcantur.

*c.* remotis petalis ſtaminum ſitus, fructus rudimentum complectentium obſeruatur.

*d.* flos ab anteriore parte, naturali magnitudine aucta et anterioribus petalis reclinatis, in corollae medio ſtamina eminere docens.

*e.* ſilicula in margine crenata, ſuperius emarginata, ab anteriore facie.

*f.* eadem ab auerſa.

# ANIMALIVM QVORVMDAM QVADRVPEDVM DESCRIPTIO

Auctore
*IO. GEORG. GMELIN.*

## I.

## MVSTELA ZIBELLINA.

Excellentiſſimus Sibiriae Gubernator, *Alexius Leonis filius Pleſchtſcheew*, duo huius generis animalia viva per integrum prope annum in vrbe Tobolsk domi ſuae aluit, quorum alterum ex Tomskienſibus, alterum Tab. VI. ex Bereſowienſibus terris allatum. Forma et habitu corporis martem, dentibus muſtelam referunt. Inferior maxilla dentibus primoribus ſex, ſatis longis et paululum incuruis, caninis duobus praelongis, pariter aduncis, molaribus vero duobus tantum, quantum diſcernere licuit, tricuspidibus, donatur. Superior maxilla dentibus minutiſſimis aſpera eſt, quorum numerum determinare nequiui. Rictus latera ſetis longis exornantur. Pedes lati ſinguli, tam anteriores, quam poſteriores, in quinque digitos diuiſi, vnguiculis albentibus, parum aduncis, muniti. Sternum prominens, acutum.

Bereſowienſis, exceptis mento et auriculis, colore ex cinereo nigricante vbique gaudet. In mento fere cinereus eſt, circa auriculas luteſcens. Dimidiam vlnam Ruſſicam longitudine aequat.

Alter

Alter minor eſt, coloris per omnia ex luteo fuſci, in mento et auriculis aliquantum pallidior.

Reliqua patent ex figura adiecta, quam optime ad viuum expreſſam de Bereſowienſi fieri curaui. Hieme, qua figura expreſſa eſt, omnia ita ſe habebant, vti modo dixi. Appropinquante vere pili iis defluxerunt, et color plane alius inductus. Bereſowienſis ex nigro luteo-fuſcus, Tomskienſis ex luteo-fuſco pallide luteus factus eſt.

Miratus ſum agilitatem horum animalium, nam ferociam appellare non auſim. Cum catus in conſpectum eorum venit, pedibus poſterioribus inſiſtunt, quaſi pugnae ſe praeparare vellent. Per noctem plurimam partem inquiete viuunt. Die ſaepius, inprimis poſt paſtum, per dimidiam, quandoque per integram, horam dormiunt. Eo vero tempore pungi, ex loco in locum proiici, os illis aperiri, et quomodocunque tractari poſſunt, nec ſenſu de hiſce vllo gaudent. Caro quaecunque ipſis in nutrimentum cedit. Excrementa peſſime olent.

## II.

## VACCA GRVNNIENS, VILLOSA, CAVDA EQVINA.

Per integrum iam annum hanc vaccam alit Excell. Gubernator, ad quem e Calmuccicis regionibus allata fuit. Longitudinis eſt $2\frac{1}{8}$ vln. Ruſſ. ex quo reliquae dimenſiones, quarum proportiones delineator ſatis exacte notauit, intelligi poſſunt. Corpus vaccinum. Tab. VII.

donec hoſtem ſuum vita priuauerit. Imo traditionem eſſe Calmuccus perhibet, id boum genus non raro venatorem cornubus tam diu ſuſpenſum tenere, donec in ipſis cornubus exareſcat, et tanquam puluis a vento diffletur, quod vero nec ipſe, tamquam rem extra omnem dubitationis aleam poſitam, aſſeuerat. Hoc ſylveſtre boum genus Calmuccis non indigenum eſt, ſed potius regno Tangut, ſiue Tibet, proprium, in cuius montoſis ad fluuium Tulum Choſo, a limitibus regni Koton-Karia, Bucharorum ſedis, duorum dierum ſpatio diſtantis, copioſe occurrit. Ita me Coſaccus, olim apud Calmuccos in captiuitate detentus, Kuſneziae iam degens, certiorem reddidit. Exiſtimat autem ille homo, eſſe Sarluk Calmuccorum ferum bouem Tangutorum, cicurem factum, quod veritatis quandam ſpeciem habere videtur; ſiquidem Tangutico boui nominatorum Auctorum, cum Sarluk Calmuccorum, vti iam annotaui, conuenit. Qua ratione horror a rubro colore in Tangutico boue explicari poſſit, equidem ſatis haereo; Ea enim feritate praeditus eſt Tanguticus ferus bos, vt non tantum a rubro colore, ſed a quacunque alia re ſenſus ſuos vel minimum afficiente, in rabiem agatur. Manſuetus vero nec rubrum colorem, nec alia metuit. Magis paradoxa eſt traditio de cantilena, durante coitu et mulctu, neceſſaria. Difficile eſt cauſam fallaciae in eiusmodi rebus inuenire. Forte Auctores iſti linguae illius, in qua portenta de hoc boum genere ſibi explicata ſunt, non ſatis periti fuerunt, cuius vel hoc ſuſpicionem mouet, quod unus durante mulctu, alter durante coitu, cantile-

nam

nam requirat. Attamen veroſimile eſt, eadem ipſis relata fuiſſe.

## III.
## OVIS LATICAVDA RAJ. SYN. QVADRVP.
### RVSS. Калмыцкой баранъ.

Cognoui iam, duorum generum oues eſſe laticaudas: vnum cauda lata longa, alterum cauda lata breui. Prius genus ipſe non vidi, a variis vero, qui illud in Calaccicae Hordae terris abunde viderunt, deſcribi audiui. Alterum in fortalitiis Septem palatiorum et Uſt- Tab. VIII. Kamenogorenſi iam indigenum, olim e Calmuccicis regionibus allatum fuit, cuius figuram et deſcriptionem exhibeo.

Ouem vulgarem habitu refert. Cornua plerumque gerit, antrorſum in ſemicirculum incuruata. Aetate prouectis, poſtquam cornua in ſemicirculum excreuerunt, non raro extrorſum adhuc incuruantur, vti e figura videre eſt. Aries, quem deſcripſi, capite et mento erat nigro, pedibus et ventre fuſcis. Dorſum ſordide luteum erat, fuſcis et albis maculis interſtinctum. De caetero color, vt in domeſticis noſtris, varie ludit. Cauda plus $\frac{1}{2}$ pede longa, vnum pedem lata, quadrata fere, in duo hemiſphaeria per lineam, medium eius tranſeuntem, diuiditur. Quo cauda magis increſcit, eo haec linea magis obſcuratur. Vidi hoedos huius generis, quibus initium tantum caudae latum erat, reliqua parte anguſtiſſima, ſenſim vero ſenſimque eam ad prioris latitudinem expandi incolae retulerunt. Cauda vero illa

ex

ex pura puta pinguedine conſtat. Aries, quem figura ſiſtit, ab exortu cornuum ad initium caudae 3½ poll. (*) longus erat.

## IV.

## SCIVRVS MINOR VIRGATVS. FVRVNCVLVS SCIVROIDES MESSERSCHMID. AN SCIVRVS GETVLVS CAII. APVD GESN. RAII SYN. QVADR.. RVSS. Бурундукъ.

Sciurum minorem habitu corporis et cauda refert. Tab. IX. E iunioribus eſt, quem figura ſiſtit, naturali magnitudine pictum, attamen adultiores non multo maiores fiunt. A roſtro extremo ad poſteriorem auricularum partem diſtantia prope duorum pollicum, inde ad initium caudae vsque 3½. Roſtrum inferius ſuperiori multo productius eſt. Duobus praelongis dentibus in vtraque maxilla gaudet, quorum ii, qui in maxilla ſuperiori ſunt, clauſo ore, inferioribus prominent. Rictus latera et ſupercilia ſetis nigris, ad rictum quidem longioribus, ornata. Frons ad roſtrum vsque luteſcens, raris, obſcure fuſcis, pilis intermixtis. Oculos tam ſuperne, quam inſerne, linea fuſca ambit, ipſae vero palpebrae albentes ſunt. Malae luteſcentes. Dorſum luteſcens, quinque faſciis nigris ſecundum longitudinem ornatum, anterius ad caput, media excepta, quae ad anteriorem vsque auricularum partem pergit, poſterius ad caudam terminatis. Cauda 5 fere poll. longa, albis, nigris et flaueſcentibus pilis, non admodum longis, varia, extremo apice albo, ab animali viuo ſupra

(*) Hic mendum ſubeſſe manifeſtum eſt. Forſitan 3½ ped.

ſupra dorſum reflectitur. In anterioribus pedibus quatuor digiti, vnguiculis tenuiſſimis, ſatis aduncis, albentibus, inſtructi. Poſteriores pedes 5 digitis ornantur. Supina pars tibiarum calua fere, prona, tam anteriorum, quam poſteriorum, pedum pilis luteſcentibus veſtita. Per vniverſam Sibiriam copioſe verſatur.

## V.

## IBEX IMBERBIS. RVSS. Сайга.

Capite eſt ouillo, niſi quod anterior eius pars, naſus inprimis, magis emineat. Reliquo corporis habitu ceruum refert. Mas in hoc genere Маргачъ (Margatſch) dicitur. Capreae Plinii altitudinem numquam attingit. Is quem deſcripſi, ab extremo capite ad pedum extremum tres pedes altus, et ab extremo capite ad initium caudae totidem longus erat. Aures erectae, latiuſculae, in mucronem obtuſum deſinentes, vltra 2 poll. longae. Vnum poll. ante aures, ſupra oculi orbitam vtrinque cornu prodit, quod in hoc indiuiduo, quadrimeſtri, nigrum erat, rectum et vix 2 poll. longum. In adultioribus cornua ad pedis longitudinem non numquam excreſcunt, inferius circulis quibusdam notata et albicantia, ſuperius laeuia, extremitate ſubnigra. Curioſius inſpicienti ſtriae etiam longitudinales apparent. Ex cornubus, vti recte Nobilis Herberſteinius, manubria cultellorum transparentia fiunt. In inferiore maxilla quatuor inciſores, et quatuor canini, cum quinque molaribus, quorum ſingulis binae radices ſunt. Superior

maxilla eodem inciſorum et caninorum numero gaudens quatuor tantum molaribus, triplici radice nixis, armata eſt. Collum longiuſculum. Armi ſpithamam longitudine non excedunt. Inferiora crura vltra pedem longa, in extremitate biſulca. A ſulco ſinus ſurgit, inter cutem et os verſus ſuperiorem pedis partem ſe vltra pollicem extendens. Papillae vtrinque duae. Teſticuli $3\frac{1}{2}$ poll. pene inferius ſiti. Cauda tenuis tres poll. longa. Pili ceruini. Color ſupinae partis e fuſco luteſcens, pronae albus.

Foemina huius generis mole corporis minor eſt, nec cornua geſtat.

Velociſſimi curſus ſunt. Quando venatores eos non proſequuntur, inceſſus admodum peculiaris ipſis eſt. Equum curſu tolutario incedentem imitantur, et per breuia interualla toto corpore in altum ſaliunt.

Inter cutem et panniculum carnoſum in viuis etiam huius generis animalibus vermes latent, $\frac{1}{2}$ poll. longi, craſſi, extremitatibus rotundiuſculis, albi et diaphani fere. Caro incolis ad Irtiſch fl. omnium vulgatisſima eſt, quae ipſis in eſcam cedit. Coitum animalia lupulo maturescente celebrant, vere parturiunt, foetumque vnum, vel alterum, ſimul edunt. Graminibus paſcuntur. Autumno admodum pingueſcunt.

In deſertis a Tara vrbe ad Septem palatiorum arcem vtrinque ad Irtiſch fluuium copioſe morantur aeſtatis tempore. Hieme montoſa magis loca appetunt, nutrimento ſuo magis apta. Teſte Herberſteinio deſertos etiam campos circa Boryſthenem, Tanaim et Volgam incolunt.

VI. CA-

## VI.

## CAPREA CAMPESTRIS GVTTVROSA, CORNIBVS NEC RAMOSIS, NEC DECIDVIS.

### AN GAZELLA AFRICANA RAI. SYN. QVADR. 79?

Capream Plinii toto habitu refert, magnitudine etiam, colore et inceſſus modo, et victu ex herbis, adeo conuenit, vt qui Plinii capream vidit, huius etiam exactam ideam ſibi formare poſſit. Figura animal ſiſtit maſculini generis, ad viuum delineatum, cuius dimenſiones hae erant: Tab. IX.

| | Ped. | Poll. |
|---|---|---|
| Longitudo capitis ab extremo roſtro ad initium colli — — — — — | | $9\frac{1}{2}$ |
| — — — auricularum — — — — — — — | | 5 |
| — — — colli — — — — — — — — — | | 7 |
| — — — dorſi ad initium vsque caudae — — | 2. | |
| — — — caudae — — — — — — — — | | 4. |
| — — — crurum anteriorum ab initio radii ad extremum pedem — | 1 | 6 |
| — — — crurum poſteriorum ab initio tibiae ad extremum pedem — | 1 | 8 |
| Diſtantia oculorum ab extremo roſtro — — — | | $5\frac{1}{2}$ |
| — — — inter ſe — — — — — — | | $3\frac{1}{4}$ |
| Diſtantia cornuum ab extremo roſtro — — — | | $6\frac{3}{4}$ |
| — — — inter ſe — — — — — — | | $\frac{3}{4}$ |
| Diſtantia cornuum ab auribus — — — — — | | $1\frac{3}{4}$ |
| — — — teſticulorum a pene — — — — | | $4\frac{1}{2}$ |
| — — — papillarum a teſticulis — — — | | 1 |

Animal ſolo inſiſtens á ſummo capite ad terram vſque tres pedes et vnum pollicem, á ſupremo dorſo ad extremum poſteriorum pedum duos pedes et quatuor pollices cum dimidio altum erat.

In ſuperiori maxilla ſex vtrinque dentes molares erant, in inferiori totidem molares, et quatuor vtrinque inciſores.

Maſculus a foemella duabus inſignibus notis differt, quarum prima eſt, quod cornua gerat, quae ſatis quidem erecta ſunt, attamen capiti non perpendiculariter inſiſtentia, et mox ſupra oculos, inter hos et auriculas, egrediuntur, oculisque propiora ſunt, ac auribus. Origine ſua plus quam pollicem lata ſunt, non tamen plane rotunda, ſed paululum compreſſa, eademque craſſitie et diſtantia inter ſe eadem ad tres admodum pollices perpendiculari propemodum via in altum ſurgunt, dimidium altitudinis integrae attingentia. Inde notabiliter extrorſum et paulo retrorſum vergunt, non procul vero ab extremitate introrſum rurſus incuruantur, et in apicem ſingula acutum deſinunt, quorum vnus ab altero quatuor fere pollices et dimidium diſtat.

Inſigniter cornua iſta rugoſa ſunt a radice ad eam vſque partem, vbi introrſum curuari incipiunt, ibi enim laeuiſſima ſunt, et ad apicem extremum vſque hunc laeuorem conſeruant. Coloris ſunt e cinereo nigricantis, apice excepto, qui nigerrimus eſt. Adde, non eſſe decidua, et ſubſtantiae, vti cornua Capreae Plinii, ſolidiſſimae.

Secun-

Secunda nota, quae maſculo a foemella diſtinguendo inſeruit, eſt guttur, quod in maſculo ſine vlla diſſectione inſigni protuberantia ſe manifeſtat, et longitudine quinque, latitudine tres, pollices aequat; Protuberantia tamen iſta in iunioribus animalibus magnitudine multum ab allegata deficit, quin in animali anniculo vix notabilis eſt: Pro ratione enim aetatis, aut pro ratione incrementi cornuum, guttur etiam creſcit.

In internis partibus nihil inſoliti inueni, quod in Rupicapra cornibus arietinis non obſeruaſſem. Larynx vero pelle denudata cauſam protuberantiae ſupradictae clariſſime manifeſtabat. Cartilago thyroidea (a a a *1*) tres pollices longa et totidem lata erat, et ſeptem proceſſibus conſpicua, (1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.) ipſum vero tracheae (bb) initium diametro duos facile poll. capiebat. Cartilago cricoidea ($\alpha\ \alpha\ \alpha\ \alpha$) circa ſummitatem duos pollices cum dimidio, ad baſin duos pollices et tres eius quartas partes, lata, duosque pollices longa, erat. Cartilagines arytaenoideae ($\beta\ \beta\ \beta\ \beta$) ſimul ſumptae tam in ſummitate, quam in baſi duos pollices latae et totidem longae erant. Epiglottis deficiebat. Figurae adiectae ab exemplo ſiccato delineatae ſunt: Circumſtantiae enim itineris, largioribus etiam obſeruationibus infeſtae, impedimento fuerunt, ne ex recenti fieri id potuerit. Fig. I. laryngem ab anteriori parte atque a latere ſpectatam ſiſtit, quae cauſa eſt, vt proceſſus 2 et 4 in figura non videri queant. Fig. II. eandem a poſteriori parte ſiſtit. Numeri et literae, in hac figura praeter indicatas adiectae, eundem habent valorem ac in Figura I.

Tab. X. Fig. 1.

Fig. 2.

Ex his, quae attuli, non difficile eſt, marem a foemina diſcernere. A Caprea Plinii cornibus non ramoſis differt. Sed terminos diſtinctionis inter foemellas vtriusque animalis, niſi a loco eorum natali campeſtri et ſyluoſo deſumantur, me ignorare fateor. Ab Ibice imberbi, licet cornuum rectitudine et abſentia ramorum in cornibus conueniat, naſo tamen non difficulter diſtinguitur, qui in Ibice, tanquam in oue, fiſſus et latiusculus eſt, cum in Caprea, quam deſcribo, vti in Caprea Plinii, integer et acutus.

Frequens eſt hoc Capreae genus in omnibus campis trans-baikalenſibus vaſtis et apertis, et Mongolice Dſeren dicitur, quo nomine etiam a Ruſſis earum regiorum ſalutatur. Ona eſt nomen foemellae, iisdem Mongolis vſitatum. Caro huius animalis incolis in victum, pellis in amictum cedit. Cornua denique magna in aeſtimatione apud Sinas ſunt, qui non exiguo ea pretio redimunt.

Cl. Meſſerſchmidius huius animalis figuram dedit, ſed male expreſſam; cornua inprimis, habita ratione ad reliquum corpus, nimis longa repraeſentantur. Figurae haec adſcripſit verba: Caprea Ona Dſheren et Scharchoechtſchi Dauurica, campeſtris, gutturoſa, potamophobos etc. Quid vir Cl. per potamophobos intelligat, reſcire non potui. Amnes enim hoc animal frequentat, aliorum inſtar animalium: vere tantum et autumno, cum ſolo vbique humente, a graminibus recentibus, vel pluuia irriguis, abunde humidi

midi capit, amnes non multum frequentare, eos tamen, vel quando venatorum inſidias effugere vult, vel propriae neceſſitatis cauſa, non raro tranſire, Tunguſi retulerunt. Non parum etiam contra hunc horrorem a fluuiis facit, quod in vrbe Selenginſk Brigadirius, Ioannes Demetrii filius Bucholz, de caprea huius ſpeciei domi ſuae educata et omnino cicurata retulit, eam amore famuli, pabulum porrigentis, ita captam eſſe, vt quando ille neceſſitatis cuiusdam domeſticae cauſa Selengam fluuium in lintre tranſeat, illa non raro famulum, fluuium transnatando, ſequatur, quod certe, ſi inſtinctu quodam a fluuiis abhorreret, non facile praeſtaret.

## VII.

## CVNICVLVS PVMILIO SALIENS, CAVDA LONGISSIMA.

Agilliſimum hoc, manſuetum et aſpectu iucundum animalculum in campis Tſchikoienſibus, Argunenſibus et Ononenſibus ſedem ſibi fixit. Generaliter quidem ad leporinum genus ſpectat, ſed penitius conſideratum ſui generis eſt, nec cum vllo cognitorum animalium, quoad notas genericas, comparandum. Cuniculo minus eſt, et corpore breuiore. Auriculae longae, leporinae, pellucidae, glabrae, et vaſis ſanguineis pulcherrime pictae, per totam longitudinem aeque latae, niſi extremitatem verſus, vbi pauſulum acuminantur. Maxilla ſuperior inferiore, vti in Talpa, multum longior, obtuſa tamen, et turgidula extremitate terminata. Rictus latera ſetae lon- Tab. XI. Fig. 1.

longiſſimae ornant. Labium ſuperius, vti in cuniculo, verſus nares hiulcum eſt. Dentes murinis ſimiles, duo in vtraque maxilla praelongi. Oculi grandes, iridibus fuſcis palpebrisque, ſetis breuioribus cinctis, donati. Corpus anterius tenue, poſterius ampliſſimum, fere rotundum, in caudam definit longiſſimam, digitum minorem craſſitie non aequantem, plus quam duas tertias longitudinis partes pilis durioribus et ita breuibus veſtitam, vt anguloſitas oſſiculorum caudae externe per pilos dignoſci poſſit, ab hinc vero ad extremitatem vſque pili ſunt longiores et in extremitate ipſa longiſſimi et, vti in cauda Erminii, aut Sciuri, ſparſi, tactu delicatiſſimi. Crura anteriora breuiſſima, quinque digitis iuxta ſe poſitis inſtructa, poſteriora longiſſima, quatuor digitis munita, quorum tres anterius ſiti ſunt, quartus pollicis fere diſtantia ab anterioribus locatur. Omnes digiti vnguiculis albentibus, vix incuruatis, anteriorum quidem pedum breuioribus, poſteriorum paulo longioribus donantur. Pilis animalculum veſtitur mollibus, ſatis longis. Supinum corpus et externa pedum pars luteſcente colore, cui cinereus obſcure permixtus eſt, gaudet, ad exortum vero pedum poſteriorum et caudae virgae candidi coloris apparent, prona pars corporis, vt et interna pedum, candidae. Cauda, quoad durioribus pilis veſtitur, luteſcens, tum vnciam circiter candida, in extremitate denique nigerrima, apice interdum albo adhuc ornata. Dimenſiones ſequentes ſunt:

Lon-

| | Poll. |
|---|---|
| Longitudo ab extremo roſtro ad initium caudae — | 6 |
| — — — — ad oculos — — — | 1 |
| — — — auricularum — — — — — | $1\frac{1}{2}$ |
| — — — caudae — — — — — — | $8\frac{1}{2}$ |
| Longitudo pedum anteriorum ab humero ad cxtremos vſque digitos — — — — — — | $1\frac{1}{2}$ |
| — — pedum poſteriorum a ſuffraginibus ad initium vſque calcanei — — — — — | 3 |
| — — — a calcaneo ad exortum digiti poſterioris | 1 |
| — — — ab exortu digiti poſterioris ad extremos vngues — — — — — — — | 2 |
| Latitudo corporis anterioris — — — — — | $1\frac{1}{2}$ |
| — — — — poſterioris — — — — — | 3 |
| — — — auricularum — — — — — — | $\frac{1}{2}$ |

Status, quem animalculum, terrae quiete inſiſtens tenet, figura, optime ad viuum facta, exprimitur. Eo in ſtatu pedibus anterioribus os et caput ſaepe ſcalpit, vti cuniculi ſolent, et canis ſagacis inſtar continuo fere veſtigat et odoratur, corpusque ſubinde in gibbum contrahit. Ad inceſſum velocem ſe accingens et femur et tibias extendit, hac ratione, vt angulum cum corpore recto maiorem efficiant, corpus tum eleuando in altum ſalit, terramque attingens eosdem repetit motus, donec ad locum deſideratum peruenerit. Dum ſaltus hos perficit, in aëre quaſi volare videtur, et ipſemet oculis meis vſurpaui, quod vno ſaltu dimidiam

orgyiam non raro abſoluerit. Dicunt vero incolae eorum locorum, quando ſe aliqua re preſſum ſentiat, equum facile tranſilire, et vno ſaltu trium orgyiarum ſpatio promoueri.

Cuniculos fodit, idque mira agilitate praeſtat. Pedibus anterioribus terram radit, denticulis radices abſcindit, terram ſolutam et radices abſciſſas pedibus poſterioribus remouet et proiicit. Vidi hac ratione cuniculum ab eo intra aliquot minuta temporis ad vnciam vsque in longitudinem excauatum. Habet hanc conſuetudinem timidum animalculum, vt, ſi venatoribus ſe preſſum, ſaltibusque ſuis captiuitatem effugere haud poſſe ſentit, extemplo cuniculos fodiendo, hoc ſibi poſtremo refugio conſulere tentet. Mox enim, quando ſe liberum credit, priorem cuniculum repetit. Sed denuo, antequam cuniculum ſuum conſequi poſſit, ad incitas redactum, idem opus foſſionis inchoat, vidique, cum turba hominum illud vndique inſequeretur, ter et quater foſſionem repetitam fuiſſe.

In futuram hiemem miro et ſagaci ſibi modo proſpicit. Foenum eo tempore ſecat, quando areſcere incipit, illudque in aceruos cogit rotundiuſculos, quorum ſinguli pedem latitudine et altitudine aequant, foenum bene ſiccatum ſuis importans cuniculis. Cum haec animalcula innumera copia in campis viuant, adeo vt propter inſignem cuniculorum, quos effodiunt, copiam, per campos iſtos proficiſcentibus, ratione equorum, continuo titubantium, perpetuas moleſtias creent, iuxta

has

has moleſtias multa voluptate perfuſus ſum, quando in numeros eiusmodi ſoeni aceruos, qui plurimam partem Ceratocarpo conſtabant, intueri licuit.

Quod internas animalculi partes concernit, oeſophagus, vti in lepore et cuniculo, medio ventriculo inſeritur. Inteſtinum coecum breue admodum, ſed amplum eſt, in proceſſum vermiformen, duos pollices longum, abiens. Choledochus mox infra pylorum inteſtinum ſubit. Veſica vrinaria citrina aqua plena. Vteri nulla plane diſtinctio. Vagina enim canalis inſtar ſine vllis artificiis in pubem vsque protenſa in duo mox cornua diuiditur, quae, vbi ouariis appropinquant, multas inflexiones faciunt, et in ouariis terminantur. Penem maſculus habet ſatis magnum, cui circa veſicae vrinariae collum veſiculae ſeminales vnciam cum dimidia longae, graciles et extremitatibus intortae adiacent. Foramen aut ſinus quosdam inter anum et penem, aut inter anum et vuluam, nullo modo potui diſcernere, licet quasuis in indagatione iſta cautelas adhibuerim.

Ex hiſce palam eſt, animalculum eſſe plane anomalum. Auriculis enim leporem, roſtro talpam, longitudine caudae murem et more cuniculos fodiendi cuniculum refert. Internis autem partibus nihil cum recenſitorum generum animalibus, praeter oeſophagi in medium ventriculum inſertionem, commune eſt. Cuniculi Americani porcelli pilis et voce Margrau. fabrica internarum partium ab hoc non multum abludunt. Sed et haec ſui generis ſunt animalcula. Quae cum ita ſint, parum abfuit, quin Cl. Meſſerſchimidius genericum no-

men Alactacha (Daurica) huic animalculo imponens, me comoueret, vt et ego inter noua genera ponerem. Sed quoniam idem Vir Cl. in Indice animalium, Sibiriae ſuae illuſtratae ingeſto, idem animal cuniculum vocat, probe ſine dubio gnarus, rigoroſa generum nouorum fabro eſſe ſuſtinenda examina, mente eadem ductus cuniculum voco, liberum cuique relinquens, hoc nominis cum mure, aut talpa, aut lepore commutare. Interim hoc adhuc pro cuniculorum genere facit, quod caro animalculi alba ſit.

Ruſſi harum regionum ob ſimilitudinem cum lepore земляной заецъ vocant, Mongolenſes Alagtaga, quod Cl. Meſſerſchmidius ad ingreſſum inualida interpretatur:

De Figura Cl. Meſſerſchmidii moneo; quod ad animalculum goſſypio infarctum facta eſſe videatur; mirum quantum enim a natura abludit, animalculumque in tali ſtatu exhibet, quem nunquam aſſumit. Cum cautela porro intelligendum eſt praedicatum caudae in ſola extremitate piloſae, quod Vir Cl. nomini generico adiecit; Indigitare enim voluit, caudam in extremitate tantum pilis longis veſtitam eſſe; ignorare enim non poterat, nec reliquum caudae pilis carere, licet breuiores ſint.

Huius denique animalculi a Cl. Strahlenbergio factam fuiſſe mentionem video in deſcriptione Borealis et Orientalis Europae et Aſiae partis, vbi Leporem volantem vocat, eumque in vaſtos campos, Volgae fluuio ad orientem ſitos, collocat. Adiecit Cl. Vir deſcri-

ptionem.

ptionem, quae veritati ſatis appropinquat, niſi quod magnitudinem ſaltus iuſto maiorem facit. Hami etiam alborum caudae pilorum in cerebro illius, qui cum Cl. Viro deſcriptionem communicauit, nati eſſe videntur.

## VIII.

## CVNICVLVS INSIGNITER CAVDATVS, COLORIS LEPORINI.

Camporum trans-baikalenſium frequens incola eſt. Cuniculum vulgarem magnitudine paulum ſuperat; ceterum habitu corporis, pilorum conſiſtentia, proprietate cuniculos fodiendi inceſſus modo, qui ſaltatorius eſt, et carne alba omnino cum illo conuenit, ſi caudam excipias, quae notabiliter longior eſt. Pedes anteriores, modo conſueto, poſterioribus dimidio fere breuiores habet, quinque digitis inſtructos, quibus totidem ungues recti, nigricantes, inter pilos abſconditi, ſatis longi, appenduntur. Poſteriorum pedum quatuor tantum ſunt digiti et totidem ungues. Mammillae vtrinque duae paruae et nigrae. Color ſupinae partis leporinus, circa collum et pedes ruffeſcens, pronae, gula excepta, quae dilute ruffeſcebat, candidus. Cauda in ſupina parte nigra, in prona alba erat. Obſeruaui, quibus pronum corpus et tota cauda cineraſcebant. Pili ſupinae partis ſeorſim ſpectati, in vtraque extremitate albeſcunt, medio nigri ſunt. Omnes hae obſeruationes intra Iulium menſem factae ſunt. Tab. XI. Fig. 2.

Circa internas partes haec obſeruaui: Caecum colo paulo anguſtius erat, ſed longius, vtpote octo pollicum longitudinem aequans, prope ilei inſertionem caeruleſcens, digiti medii capax, ſenſimque decreſcens, in extremitate vix calamum ſcriptorium latitudine capit, colore ibidem albente gaudens. Oeſophagus vti in lepore ventriculum medium ſubit.

A Mongolis Tolai dicitur, idemque nomen Ruſſis etiam harum regionum vſitatum eſt. Figuram eius ad viuum animalculum fieri curaui, vt ei, quam Cl. Meſſerſchmidius dedit, rudem admodum, meliorem ſubſtituerem. Nomen Cuniculi caudati Dauurici, a Viro Cl. impoſitum, paululum mutaui, quia etiam vulgares cuniculi cauda non carent.

## IX.

## ISATIS. RVSS. нeceцъ.

Hiſtoriam et deſcriptionem animalis, in regione maris glacialis frequentiſſimi, et vulgo inter vulpis genera recenſeri ſoliti, durante mea in vrbe Iakutzk commoratione, adornare mecum conſtitueram, cum, quae adhuc de iſto animali in ſcriptis hinc inde leguntur, relationibus plurimam partem vagis nitantur, iisque vehementer incompletis. Conſului hanc in rem varios homines fide dignos, qui venationi huius animalis multos annos incubuerunt, impetraui etiam a Praefecto vrbis, vt hieme annos 1736 et 1737 intercedente duo huius generis animalia occiſa, internisque partibus nondum ſpoliata

ſpoliata, mas et foemella, e Schiganenſibus hibernaculis ad me adſerrentur, e quibus denique ſequens deſcriptio enata eſt.

Iſatis animal eſt, caudae prolixitate, eiusque longitudine, magnitudine corporis, reliquoque eius habitu, vulpi perſimile, facie magis canina, quam vulpina, pilis, ac in vulpe, mollioribus, coloris plerumque candidi, interdum et cinerei.

Dimenſiones indiuiduorum, quae prae manibus erant:

| | In Maſculo Poll. Par. | In Foemella Poll. Par. |
|---|---|---|
| Ab extremo roſtro ad initium caudae – | $22\frac{1}{10}$ | – 22 |
| Caudae longitudo — — — | $12\frac{7}{10}$ | – 11 |
| Ab extremo roſtro ad medium inter oculos ſpatium — — — | $2\frac{1}{10}$ | – 2 |
| Interni oculorum canthi inter ſe diſtant – | $1\frac{7}{10}$ | – $1\frac{6\frac{1}{2}}{10}$ |
| Ab externo oculi cantho ad eam auris partem, quae proxima eſt — | $2\frac{1}{10}$ | – 2 |
| Aures longae — — — | 2 | – 2 |
| Aures ad radicem latae — — | $1\frac{7}{10}$ | – $1\frac{6}{10}$ |
| Aures a ſe inuicem diſtant — — | $2\frac{1}{8}$ | – $2\frac{1}{8}$ |
| Humerus longus — — — — | $4\frac{1}{8}$ | – $3\frac{4}{5}$ |
| Ulna longa — — — — | $4\frac{1}{8}$ | – $3\frac{5}{8}$ |
| Carpus et metacarpus vna cum digitis — — — — — | $3\frac{4}{5}$ | – $3\frac{5}{8}$ |
| Ungues quatuor anteriorum digitorum longi — — — — | $\frac{4}{8}$ | — $\frac{4}{8}$ |

In

| | | in Maſculo Poll. Par. | | In Foemel. Poll. Par. |
|---|---|---|---|---|
| Femora longa — — — | fere | 5 | — | $4\frac{1}{2}$ |
| Tibiae longae — — — | fere | 5 | — | $4\frac{1}{2}$ |
| Extremus pes — — — | — | $4\frac{1}{2}$ | — | $4\frac{1}{6}$ |
| Ungues poſteriorum digitorum | — | $\frac{4}{5}$ | — | $\frac{4}{5}$ |

Caput, vbi trunco adnaſcitur, latum, in roſtrum ſatis acutum deſinit, ceterum pro ratione reliqui corporis breue eſt. Aures fere rotundae. In pedibus anterioribus quatuor digiti anterius ſiti, vnguibusque leuiter aduncis, robuſtis, verſus apicem albentibus, radicem verſus nigricantibus, inſtructi, et quintus, poſterius in interna pedis parte ſitus, a radice proximi quatuor anteriorum vnguis $\frac{11}{12}$ poll. diſtans, vngue pariter robuſto, leuiter nigricante, anteriorum digitorum paulo breuiore, ſed magis adunco, inſtructus. In pedibus poſterioribus quatuor tantum digiti anterius ſiti, totidem vnguibus albentibus, radicem verſus leuiſſime nigricantibus, leuiter aduncis, inſtructi. Penis craſſitie vix calamum anſeris, teſticuli magnitudine vix amygdalam aequabant, adeoque inter pilos deliteſcebant, vt vix eorum veſtigium deprehendi potuerit. In foemella vulua ab ano diſtabat $\frac{4}{5}$ poll. Pili per totum corpus ſpiſſi, molles, lanae fere ſpecie, non tamen criſpi, duos fere pollices longi, in capite tamen breuiores, in pedibus breuiſſimi. Ad nares porro et in inferiori maxilla pili deficiunt, cutisque nigro ibidem colore tincta eſt.

Ventriculus omnino, vti in cane. Inteſtina tenuia in maſculo $2\frac{3}{4}$ vlnas, in foemella 2 vlnas $13\frac{1}{2}$ werſchok,

ſchok craſſa in vtroque indiuiduo $5\frac{3}{4}$ werſchok aequabant. Caecum anguſtum, duris foecibus repletum et $2\frac{5}{8}$ werſchok longum, adeoque Grewii deſcriptioni vulpinae non admodum conueniens. Hepar in mare in ſex lobos erat diuiſum, quorum quatuor maiores erant, duo minores, et ex his alter lobulum Spigelii conſtituebat. In foemella octo lobos numeraui, tres maximos, vnum mediocrem, et quatuor minores. Duo minorum, in gibba parte conſpicui, cum tertio in ſima parte poſito, lobum quaſi trifidum conſtituebant. Quartus a lobo, cui veſicula fellea adiacet, tegebatur, adeoque ſimam pariter hepatis regionem occupabat. Veſicula fellea pyriformis, pauco felle repleta. Lien $1\frac{3}{4}$ werſchok longus, ſuperius $\frac{1}{4}$ circiter werſchok, inferius $\frac{1}{2}$ latus, tenuis ſubſtantia lienem humanum referebat. Pancreas $1\frac{1}{2}$ werſchok longum, $\frac{1}{2}$ werſchok latum. Choledochi et pancreatici ductuum inſertio in duodenum erat duobus diſtinctis orificiis, diſtantia duorum werſchok cum ſemiſſe a pyloro. Cordis, pulmonum et vaſorum e corde oriundorum, aut ibi terminatorum, eadem omnino diſpoſitio, ac in cane. Vaſorum ſpermaticorum tam in mare, quam foemella, idem omnino ortus, ac in huius generis animalibus eſſe ſolet. Vaſa deferentia in mare recta deſinunt in collum veſicae, non in veſiculas ſeminales, quarum nec veſtigium, licet diligenter inquiſiuerim, deprehendere valui. Penis oſſiculum condebat, vti in canibus. Vagina vteri, vti obtinet in quouis fere pecore, in duo diuiditur cornua, quae ſingula ad ouarium ſui lateris pergunt; ouaria vero vermem in ſe con-

conuolutum referunt, et cum membrana, renes inuoluente, arcte connectuntur. Nec in mare, nec in foemella, folliculorum, ad anum alias ſitorum, veſtigium quoddam inuenire licuit, cui quidem fauet, quod animal hoc vulpino odore aut careat, aut ſaltim imbecilli admodum imbutum ſit. Diu enim vtrumque in meis aedibus iacens, etiamſi viſcera quaedam fanie iam corrupta eſſent, notabilem foetorem nequaquam ſparſit. Verum nolim propterea folliculorum in hoc animali defectum accuſare. Dudum enim obſeruaui, plurimam animalium, eiusmodi folliculis inſtructorum, partem, folliculos ſuos oeſtri tempore quam maxime prodere, et per quam minutos alio tempore gerere, qui igitur forte etiam viſum meum fugere potuerunt. In Sciuro certe vulgari et in Sciuro virgato non tantum folliculos hos, ſed et ductus inde in penem vsque protenſos et cum eo arcte connexos, non vna vice oeſtri tempore obſeruaui, quae alio tempore fruſtra quaeſiui, vnde et coniectatus ſum, vſum, iis folliculis vulgo adſcribi ſolitum, nondum eſſe certum. Quis enim vidit foramina, quibus hiant in inteſtinum rectum? Et quare, ſi ſuccus eorum dilutioni tantum foecum ſeruit, folliculi non omni tempore aequaliter turgent? Paucis dicam: Explorentur cum cura folliculi moſchiferi Cabargae, nam illi propter magnitudinem ſenſuum fallaciae minus obnoxii ſunt, et patebunt etiam vſus folliculorum in reliquis animalibus, quae iis inſtructa ſunt; volatilium enim genere excepto, nullus fere dubito, quin vſus eorum in omnibus idem ſit. Quin incertum eſt, an

non

mon et in volatilium genere eiusmodi vſum praeſtent.

Sceleton Iſatidis mihi haud differre videtur a vulpino; vt tamen collatio exacta inſtitui poſſit, maris Sceleton confectum eſt.

Ex relatione denique venatorum addo, latratum Iſatides edere vulpium inſtar, voce magis rauca, ac canes, interdum etiam eiulare.

Duo vulgo recenſentur Iſatidis genera, vnum candidi, alterum cinerei, aut, vti Olaus Magnus vocat, coeleſtini, ſiue aſurini coloris. Et haec diſtinctio in mercatura inprimis in vſu eſt. Quaeuis enim Iſatidis cinereae pellis maiori pretio venit, ac alba, et quo color in Iſatide cinerea nigredini propius accedit, eo pellis habetur pretioſior. Ego plures Iſatides, tam albas, quam cinereas, aſpexi et contemplatus ſum, imo indiuiduorum hic deſcriptorum maſculus candido, foemella cinereo, colore gaudebat. Vti in Iſatide candida pili candidi ſunt per totum corpus, ita in cinerea cinerei, nec vlla alia externe differentia patet. Quae vero in hepatis lobis differentia annotata eſt, id nec a ſexus, nec a ſpeciei diuerſitate repetendum eſſe ſentio, cum tam in hominum, quam brutorum cadaueribus, varietates eiusmodi quotidie obueniant. Multa tamen venatorum pars, Iſatides candidas et cinereas ſpecie differre, pronunciat. Sed exinde mea ſententia nihil decidi poterit. Plerumque enim plebi contingit, vt maior pars ſit errantium, quam rite ſentientium. Duos inueni venatores, vnum Iacutiae, alterum Ieniſeae, quos, poſt

multa cum iis per multos dies protracta de variis rebus colloquia, pro veracibus non tantum, ſed et naturae cognitionis amantibus hominibus habere cum voluptate coactus fui. Hi aſſeruerunt, ſe per annos quam plurimos, quibus venationi Iſatidum inhiarunt, non vna vice prolem Iſatidum vidiſſe, matrem ſiue candidam ſiue cineream ſectantem, cuius plurima indiuidua candida erant, vnicum forte cinereum, plures vero eſſe proles, quarum indiuidua, omnia ſint candida, hac circiter ratione, vt inter ſingulas tres Iſatidum proles, quarum ſingulae ad viginti et plus interdum indiuidua continent, vnicum indiuiduum cinerei coloris conſpiciatur, nec vnquam ſe vidiſſe prolem, cuius omnia indiuidua cinerea fuiſſent. Quodſi haec obſeruatio certa eſt, iuſta conſequentia fluit, Iſatidem cineream candidae varietatem eſſe.

Locus natalis Iſatidis eſt ad littus maris glacialis, et ad omnes fluuios amnesque in illud ſe exonerantes, quousque eorum littora ſyluis nuda ſunt, adeoque in regione Kolimae fluuii ad Kolimenſem vsque arcem, a ſitu, quem reſpectu fluuii tenet, inferiorem dictam, in regione Indigircae fluuii ad amnem vsque Oſchoginam, in regione Lenae fluuii ad locum quendam, Cumac-ſsur vocatum, in regione Oleneci ad parem fere a mari diſtantiam, in regione Chatangae ad Lucineam vsque fluuium, in regione Piaſſidae fluuii ad Dudiptam vsque, in regione Ieniſeae ad ſuperiorem vsque Dudinam fluuium. Multo porro ſunt fluuii amnesue, in nominatos labentes, quorum littora ab Iſatidibus incoluntur. Sic prae reliquis celebres ſunt inferiores regiones

nes Chetae fluuii et Wolotſchankae amnis, quorum vterque ex occidente, ille quidem Chatangam, hic Chetam ſubit. Etiam Dudipta Piaſſidam ſubiens non exiguam famam habet, et multi alii, quos ſilentio praetereo, ne prolixitatis nimiae crimen incurram. Modo ſint loca ſyluis nuda, et cliuoſa et ſatis frigida, vti ſunt omnia illa, quae recenſui, vtpote quoad ſitum non infra altitudinem 69° conſtituta, ea Iſatis haud auerſabitur, cui quidem apprime conſentaneum eſt, quod Schefferus in Lapponia illuſtrata dicit, hoc animal non in ſyluis, verum nudis montibus verſari, Noruagiam Sueciamque interpoſitis. Loquor de loco Iſatidis natali, non de quouis, quem Iſatis tranſit. Comperi enim, ad Lenam fluuium interdum ad hibernacula vſque Sictacenſia et Schiganenſia, ad Ieniſeam in regionem vſque Turuchanii vrbis aſcendere. Imo Kirengae ad Lenam percepi, ante octo hos annos duas Iſatides ex aduerſo arcis occiſas fuiſſe. Ieniſeenſes in regione vici, qui a Dubtſches fluuio nomen ſortitus eſt, imo in regione ipſius Ieniſeae vrbis, Iſatidas aliquando viſas fuiſſe teſtantur. Verum nullum habetur exemplum, quod in vllo horum locorum Iſatis vnquam cuniculum ſibi foderit et prolem generauerit, adeoque tanquam tranſiens, et quaſi aberrans, in eiusmodi locis cenſenda eſt, quae coniectura etiam exinde roboratur, quod aberrationes eiusmodi nunquam contingant, niſi iis annis, in quibus magna Iſatidum copia in inferioribus fluuiorum regionibus obſeruatur.

Iſatides circa feſtum annunciationis Deiparae (expreſſione venatorum vtor) generis propagationi inhiant, idque negotii duabus tribusue ſeptimanis abſoluunt, quo durante ſaepe ipſis accidit, quod canibus, vt coitu celebrato diſiungi ab inuicem nequeant. Quamdiu oeſtrum durat, ſub libero aëre perpetuo verſantur, nusquam durant diu, ſed oeſtro abſoluto cuniculos petunt. In locis nimirum Iſatidis natalibus, et quidem in collibus eorum locorum, multi ab antiquo cuniculi conſpiciuntur, ab Iſatidibus excauati, ad oſtium tantum lati, vt Iſatis ingredi poſſit, quae quidem latitudo tam parua eſt, vt canem haud admittat. Extenſio cuniculorum eſt ſecundum glebam conglaciatam ad quatuor et quinque orgyias in longitudinem, adeoque profunditas, computando a ſuperficie collium externa, non vbique eadem. Quidam venatores dicunt, quodlibet Iſatidum par peculiarem cuniculum incolere, qui cum nullo alterius cuiusdam paris communicet. Alii vero aſſerunt, tria et quatuor interdum paria vna habitare. Conueniunt tamen omnes, infra quinque Iſatidum paria, ſeparatim viuant, an vna, raro in eodem colle nidulari. Quilibet cuniculus multis exitibus donatus eſt, ſex, octo et decem, qui omnes vel recta, vel et oblique curuoue ductu extenſi in vnum centrum, cubile animalis, quod ad dimidiam vlnam latum eſt, deſinunt. Hiſce igitur ab antiquo iam exiſtentibus cuniculis vtuntur Iſatides, nouos ſibi raro ſtruentes. Quem vero ſibi eligunt, eum a ſordibus prope purgant, et, ſi alicubi collapſus eſt, reparant. In cubili vero muſcum ſibi pro molliori cubitu ſternunt.

In

In cuniculis poſt oeſtrum abſolutum aliquot dies quiete iacent, ex eo vero tempore victum ſibi quotidie extra quaerunt, eumque non niſi per interualla inhabitant. Vterum nouem circiter ſeptimanas gerunt; Durante enim ieiunio, quod Diuis Apoſtolis, Petro et Paulo, dicatum eſt, atque ſub finem Maii initia ſumit, parere dicuntur. Foetus edunt in ipſo cuniculo, ſex ſeptem, octo ad 25 vsque, prouti anni fertilitas fauet. Foetus Iſatidis albae, quando prodeunt, colore gaudent e luteo in ruffum aliquantum inclinante, cinereae vero nigricante. Vtriusque pili perbreues ſunt. Mater quinque vel ſex ſeptimanas poſt enixos foetus raro cuniculo exit, idque temporis in lactationem impendere creditur; quo elapſo et illa quotidie victus captandi catulisque apportandi cauſſa in campis vagatur. Circa medium denique Auguſti etiam catuli eo vsque excreuerant, vt cuniculo egredi poſſint, quo tempore cuniculares (Norniki) audiunt. Pilis tunc veſtiuntur, vix dimidium pollicem longis, et albae quidem Iſatides plurimam partem albis, niſi ſecundum mediam dorſi longitudinem, vbi color luteſcens apparet, nigreſcenti permixtus et in cinereum aliquantum vergens. Iſatides cinereae tunc totae nigreſcunt, omnino vti tunc temporis, cum in lucem prodierunt, nec poſtea vel in hiemem vsque vllam aliam mutationem ſubeunt, niſi quod pili euadant longiores et lucidiores. Circa Feſtum exaltationis crucis, ſiue medio Septembri, pili dimidium pollicem longitudine iam ſuperant. In albis omnia tunc alba; praeter dorſum et ſpatium, armis interpoſitum,

quae

quae nigricant, quare tunc cruciatae (Kreſtowiki et Kreſtowatiki) audiunt. Hanc mutationem ineuntes, et illae, et cinereae, in terris turfaceis, quae in locis Iſatidum natalibus frequentes ſunt, non raro pernoctant. Circa initium Octobris pili in pollicem vsque excreuerunt, et nigricans candidarum Iſatidum inter armos ſpatium totum euanuit, ſecundum medium dorſum vero color ex albo et nigro permixtus apparet, quali Lari gaudent, in iis regionibus verſantes, quare tunc Lenenſibus venatoribus Larea (ſit verbo venia, Ruſſ. Tſchaëſchnik) audit. Ieniſeenſes vocabulo ſingulari ad hanc diſtinctionem exprimendam non vtuntur. In fine Octobris, circa diem Demetrii, candidum genus Iſatidum iam totum album eſt, pili vero nondum in tantam longitudinem excreuerunt, quales rigida hieme apparent, quare tunc Iſatis nondum perfecta (Nedopeſez) dicitur. Circa Feſtum denique Nicolai, quod in 6. Decembris incidit, pili in tantam longitudinem excreuerunt, quae nec tota hieme amplius augetur, ex quo igitur tempore Κατ'ἐξοχην Iſatis (песецъ), aut Iſatis perfecta (рослопесецъ) vocatur. Vere appropinquante, circa feſtum Nicolai vernum, quod in diem nonum Maii incidit, interdum etiam tardius, omnium maxime vero circa feſtum Imperatori Conſtantino dicatum, quodque 21 Maii celebratur, pili defluere incipiunt, et circa feſtum Eliae Prophetae, in 20 Iul. incidens, omnes iam defluxerunt. Hac mutatione contingente Iſatis verna (Weſchniak) dicitur. In defluxorum pilorum locum alii paulatim ſuccreſcunt breues, qui circa medium

Auguſti

Auguſti non longiores ſunt, nec alio colore praediti, ac cunicularium Iſatidum, quas ſupra nominaui, adeoque ex eo tempore cum catulis ſuis easdem in hiemem vsque mutationes ſubeunt, quas paulo ante recenſui. Pili Iſatidis cunicularis omnium firmiſſimi ſunt, nec non niſi magna vi a pelle auelluntur, Quo vero Iſatis adultior euadit, eo pili mollius inſident, etiam Iſatidibus, quae hibernis quam vernis menſibus propius occiſae ſunt, pili fortius haerent.

In victum Iſatidi praecipue cedit mus quidam campeſtris Brachyuros, quem perpetuo ſectatur. Sed aeſtate nec anſerum anatumue, quarum quouis vere per magna vis in frigidas regiones ſpeciei propagandae cauſa auolat, capturam negligit. Callidiſſimum enim, vti omnes venatores vno ore affirmant, animal eſt, et vulpi nequaquam aſtutia ſecundum. Iſatides, referunt venatores, cum catulis ſuis cunicularis, lacum quendam in vicina ſitum petere, in cuius inſulis magna anatum anſerumue vis habeatur; eo autem tempore multos eiusmodi lacus haberi, quia anſeres et anates, quotquot ſunt, licet et in turfaceis terris nidificatae ſint, cum prole excluſa lacus petant, vt nimirum, et ipſae, et proles, parum tunc temporis plumatae, et ad volandum minus aptae, hoſtes facilius euitare queant; catulos igitur Iſatidis, lacum eiusmodi attingentes, circumcirca ad littus inter gramina ſeſe abſcondere, matrem vero circumſpicere de commodo captandae praedae loco; et vbi talem inuenerit, in lacum ſe proiicere et ver-

ſus proles anatum anſerumue natare; adultas tum anſeres aut anates prolis defendendae cauſſa Iſatidem verſus natare, quae, quaſi huius perſecutionis ignara eſſet, continuo curſu prolem petat; quam primum vero ſufficientem anſerum anatumue copiam ſe inſequi percipiat, protinus verſus eas reuerti, et eo ipſo tempore prolem Iſatidis, inter gramina ante abſconditam, lacum ingredi, anſeresque circumuallare, et vna cum matre ſua quindecim aut viginti anſeres anateſue vna praeda auferre. Hieme Iſatis praeter nominatum murem victum etiam capit ex Lagopo aue, cui, vel viuae, vel retibus irretitae, inſidiatur, et ex leporibus, quos ſine multo labore iugulat. Denique et hoc, fame forte vrgente, accidit, vt in decipulis captas Iſatides eximant et deuorent.

Hoſtes Iſatis propter calliditatem ſuam habet paucos. Inſidiantur tamen ei e quadrupedibus Gulo, e volucribus Aluco maior. Sed raro viuam occidunt, capiunt vero multas mortuas, quas e decipulis, a venatoribus exſtructis, ante aduentum venatorum, eximunt et conſumunt. Idem et coruus facit, iis nempe in locis, vbi ſyluae in vicinia ſunt, nam ad ipſum littus maris glacialis corui non habentur.

Iſatis raro integrum annum in eodem loco degit, idque victus forte ratio exigit. Conſtans enim venatorum aſſertio eſt, quando mus, de quo ſuprà, frequens ſit, frequentes etiam eſſe Iſatides, quin aduentum murium, Iſatides breui aduenturas, praenunciare. Igitur, quando mus regionem quandam deſerit, Iſatis pariter

eam

eam deſerere cogitur. Ordo hac in migratione nullus adhuc obſeruatus fuit. Accidit, vt transeant tantum regionem quandam, accidit, vt dimidiam hiemem, vt et integram, in illa viuant, accidit, vt prolem tantum gignant et breui poſt diſcedant, interdum etiam accidit, vt per integrum annum in eodem loco morentur, et altero adhuc anno prolem ibidem gignant. Tempus, quo maxime migrare amant, illud eſt, quando ſol ſub horizonte occultari incipit, ſub initium nempe Decembris. Quam regionem deſeruerunt, eam poſt tres quatuorue annos repetunt. Non hoc ita intelligendum eſt, ac ſi interdum regio vna et altera, quas ſuperius natales Iſatidis pronunciaui, Iſatide omnino vacua ſit: ſemper enim quaedam ſuperſunt, omnino, vti de vulpibus obſeruatur, quarum magna pars perpetuo turmatim migrat, remanentibus tamen ſemper in quauis regione quibusdam indiuiduis. Si quodam in loco magna Iſatidis vis aduenit, latratumque edit, pro ſigno habetur, eam per aliquod tempus ibi commoraturam eſſe. Si vixit aliquandiu in quodam loco, editque eiulatum, breui poſt eum locum deſerit. Quo Iſatis diſcedens abeat, venatoribus ignotum eſt. Ieniſeenſes ſuſpicantur, e regione Ieniſeae fluuii abſcedentem Obi fluuii regionem petere, aduenientem vero exinde venire: Iuraces enim, qui Samoiedarum genus ſunt, in regione oſtii Obi fluuii morari ſoliti, Iſatidum capiendarum cauſſa iis praeſertim annis ad ſe venire, quibus magna apud ſe Iſatidum copia habeatur, quod non facerent, ſi vel minima capturae ſpes apud illos foret.

Iſatides in regione Ieniſeae et Chatangae fluuiorum morantes propter magnitudinem ſuam prae Lenenſibus, Lenenſes rurſus prae Kolimenſibus celebres ſunt; Et profecto haec differentia ita notabilis eſt, vt facile in ſenſus incurrat. Sed an propterea diuerſas ſpecies conſtituant, in ſuſpenſo adhuc relinquendum eſt. Conſideratione non indignum eſt, quod lepores, vrſi albi, lupique e quadrupedibus, Aluco e volucribus, in regione inferiori Ieniſeae fluuii capti, eorundem generum animalibus, in reliqua Sibiria obuiis, magnitudine praecellant. Certe videtur regio huic magnitudini fauere, quia in pluribus animalium generibus obſeruatur.

Iſatidem cum Ionſtono vocaui, quia a vulpe vulgari ſpecie omnino differt.

OBSER-

# OBSERVATIONES METEOROLOGICAE

## AB ANNO MDCCXLIX AD ANNVM MDCCLIV PETROPOLI FACTAE, ANIMADVERSIONIBVS ILLVSTRATAE ET CONSECTARIIS.

Auctore

*I. A. BRAVN.*

Communicamus hic obſeruationes meteorologicas ſex annorum, ab anno ſcilicet 1749 ad anni finem 1754 Petroburgi inſtitutas. Superiores obſeruationes a me communicatae incipiebant ab anno 1744, et pertinebant ad finem anni 1747, erantque adeo quatuor annorum, vbi iam monitum eſt, obſeruationes anni 1748 deficere. Quum fere eadem methodo in his obſeruationibus vſi ſimus, ac in praecedentibus, et iisdem quoque inſtrumentis obſeruationes factae ſint; ſuperfluum eſſet, multa de modo et inſtrumentis hic monere. Sunt ſcilicet ſummae et infimae Mercurii altitudines in Tubo torricelliano per ſingulos anni menſes notatae, cum differentiis, ad cognoſcendam variationem earum cuiuslibet menſis et anni cum altitudine media barometrica. In obſeruationibus thermometricis maximas quoque et minimas caloris diminutiones enotauimus per ſingulos anni menſes cum differentiis ad variationes caloris ſingulorum

menſium et totius anni exhibendas. Porro meteora potiora per ſingulos anni menſes propoſuimus, additis ſaepius circumſtantiis, antecedentibus et conſequentibus, ad nexum cum iis, ſi quis eſt, repraeſentandum. Barometrum ſimplex et hic eſt adhibitum, in quo pollices duodecimales pedis regii Pariſini ſunt notati, qui rurſus in partes centeſimas ſunt diuiſi. Indicantur hae numero poſt punctum poſito, vti pollices numero ante punctum. Thermometri gradus ſecundum ſcalam Delislianam et hic ſunt indicati, vbi Cifra, nullitatis nota, gradum caloris aquae bullientis, numerus autem 150 punctum congelationis notat. Comparauimus quasdam obſeruationes meteorologicas ex Sina acceptas cum Petropolitanis, in quibus et magneticae quaedam occurrunt, comparatae cum iis, quae in Sibiria factae ſunt. Sequuntur ipſae obſeruationes ſecundum ordinem temporis collocatae.

## Obſeruationes meteorologicae anni 1749 et ſequentium, ad finem anni 1754 potiſſimum barometricae et thermometricae.

### A. MDCCXLIX

Barometricae altitudines ſupra planum maris 51 pedum Pariſinorum ſunt obſeruatae.

| | | Maxima. | | Minima. | | | Differentia |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ianuarii | 3. | 28. 60 | - | 27. 20 d. 7 | - | - | 1. 40 |
| Februarii | 24. | 28. 62 | - | 27. 20 d. 3 | - | - | 1. 42 |

Maxima

| | | Maxima. | Minima: | | Differentia |
|---|---|---|---|---|---|
| Martii | 3. | 28. 60 - | 27. 05 | d. 8 | 1. 65 |
| Aprilis | 24. | 28. 41 - | 27. 65 | d. 14. 16. 17 | - 0. 76 |
| Maii | 1. | 28. 40 - | 27. 40 | d. 31 | - - 1. 00 |
| Iunii | 26. | 28. 00 - | 27. 30 | d. 10 | - - 0. 70 |
| Iul. 30 et 31. | | 28. 25 - | 27. 35 | d. 7 | - - 0. 90 |
| Auguſti | 28. | 28. 55 - | 27. 45 | d. 31 | - - 1. 10 |
| Sept. | 11. | 28. 55 - | 27. 20 | d. 4. 5 | - - 1. 35 |
| Octobris | 29. | 28. 45 - | 27. 20 | d. 1 | - - 1. 25 |
| Nou. 5. 6 et 7. | | 28. 70 - | 26. 90 | d. 25 | - - 1. 80 |
| Decemb. 20. | | 28. 70 - | 26. 95 | d. 6 | - - 1. 75 |

Maxima igitur altitudo per integrum annum eſt 28. 70, quae obſeruata fuit menſibus Nouembri et Decembri, et quidem Nouembris 6 et 7, Decembris autem 20. Minima vero eſt 26. 90, quae notata eſt Nouembris 25. Maxima altitudo menſe Nouembri notata ſub his circumſtantiis contigit. Ventus O d. 5 vix ſenſibilis erat, ſequutus autem dein d. 6 ventus vehemens O, qui ad d. 7 vsque mane continuauit, dein rurſus tranquillitas, vento S *g* S flante, ſequuta eſt. Diebus aliquot antecedentibus ventus S*g*O debilis flauit; Thermometrum inter 156 et 150 variatum fuit. Quae Decembris 20 contigit eadem altitudo veſperi h. 7 comitata eſt vento non ſenſibili, praecedebat Ventus Ooo, 1 et 2, et ſequebatur S*g*O. 1. 2. Thermometrum monſtrabat 163. Quia huius anni altitudo maxima 28. 70 non ſuperat altitudinem maximam hic iam alias obſeruatam, 29, 01; manet huc vsque haec maxima. Altitudo huius anni minima

minima 26. 90 itidem minor eſt altitudine minima alias hic obſeruata 26. 41. Ergo et haec adhuc omnium hic obſeruatarum manet minima, vti quoque ſpatium variationum barometricarum maximum perſtat inuariatum 2. 60 vel praeciſe 2. $59\frac{10}{18}$. et variationes barometri menſtruae in primis et vltimis anni menſibus maiores, quam in mediis et hic conſpiciuntur.

Conſiderata ponderis atmoſphaerici per hunc annum variatione, variationem quoque caloris conſideremus neceſſe eſt. Fuerunt autem hoc anno caloris gradus minimi et maximi, per ſingulos anni menſes cum differentiis qui ſequuntur.

| | Minimi. | | Maximi. | | Differentia |
|---|---|---|---|---|---|
| Ianuarii | 6. 179 | -- $150\frac{1}{2}$ d. | 17. 18. 19 | m. | -- $28\frac{1}{2}$ |
| Februarii | 7. 177 | -- $151\frac{1}{2}$ d. | 28 | | -- $25\frac{1}{2}$ |
| Martii | 3. 169 | -- 152 d. | 24 | | -- 17 |
| Apr. 2 et 11. 155 | | -- 136 d. | 29 | | -- 19 |
| Maii | 1. 139 | -- 110 d. | 26 | | -- 29 |
| Iunii | 2. 134 | -- 122 d. | 28 | m. | -- 22 |
| Iulii | 12. $127\frac{1}{2}$ | -- $121\frac{1}{2}$ d. | 31 | | -- 6 |
| Auguſti | 23. $136\frac{1}{2}$ | -- 111 d. | 13 | | -- 25 |
| Septemb. | 27. $145\frac{1}{2}$ | -- $128\frac{1}{2}$ d. | 1 | | -- 17 |
| Octobris | 15. $158\frac{1}{2}$ | -- 141 d. | 1 | | -- $17\frac{1}{2}$ |
| Nouemb. | 28. $179\frac{1}{2}$ | -- 146 d. | 11 | | -- $33\frac{1}{2}$ |
| Decembris | 20. $174\frac{1}{2}$ | -- 143 d. | 30 | | -- $31\frac{1}{2}$ |

Comparatis inter ſe ſummi et infimi caloris gradibus adparet, ſummum caloris gradum fuiſſe 110 Maii 26, diminutum autem eſſe calorem ad $179\frac{1}{2}$ Nouembris 28 qui hoc anno infimus fuit gradus. Fuit igitur integra variatio caloris graduum $69\frac{1}{2}$, dum a 110 decreuit ad $179\frac{1}{2}$. Maximus

mus calor incidit in Maii 26 h. 7 p. m. flante vento debili S, qui etiam multis diebus poſtea continuauit, vti quoque aliquot diebus antecedentibus ſpirauit, quo tempore tempeſtas ſatis calida fuit. Barometrum 27. 55 monſtrabat. Quia huius anni calor maximus non ſuperat calorem hic alias obſeruatum 104; hoc vsque hic manet maximus. Maxima caloris diminutio hoc anno fuit Nouembris 28 179½ h. 7. p. m. vento vehementi ex Oriente flante. Praecedebat debilis N, ſequebatur O, qui continuabat aliquot diebus pari fere vehementia, quem dein debilis S. excepit. Barometrum erat 28. 00, quod ſequentibus diebus donec vehementia venti remiſit, et ventus auſtrum verſus mutatus erat, continuo ad 27. 35 deſcendit, Quodſi calor ſummus et infimus huius anni conſiderentur, et cum aliorum annorum calore et frigore comparentur: facile conſpicitur aeſtatem huius anni neque admodum calidam, neque hiemem valde frigidam, adeoque aerem ſatis temperatum fuiſſe.

Venti vehementiores hoc anno fuerunt Ianuarii 19 O. g. N. 3. Febr. 4. W. 3. d. 9. S. 3. d. 26. S. et. W. 3. Martii 6. et 7. W 3. d. 8. W. 4. d. 27 O 3. Aprilis 10. O 4, qui ad 12 continuauit. O 3. d. 21. 23. 24. 26. Maii S. g O. 3 d. 4, et d. 5. S. g O. 4 d. 9. S. g. W 3. d. 28. et 29. O. 4. d. 31. O. 4. Iunii O. g. N 4. d. 6 O. 3. d. 7 O. g. S. 4. d. 13. et 14. O. g. S. 3. d. 17. O. 3 d. 20. O. g S. 3 item d 21. et 22. d. 23. O. 4. Iulii 10. S. 3. et d. 11, 12. W. 3. item d. 20. 21. 22. Aug. 14. d 15 et 16. S. g. O. 3. d. 22. 23. O. 3. d. 24. O. 4. Septembris

2. 3. 4. W. 3. d. 26. O. 3. d. 27. O. g. N 3. Octobris 2. N 3. d. 27. W. g. S. 4. Nouembris 1. S. g. O. 3. d. 6. O g S. 3. d. 8. W. g. S. 3. d. 9. W. g. S. 4. d. 10. et 11. W. 3. d. 12. W. g. S. N. 4. d. 25. et. 26. N 4. d. 28 et 29. O. 3. d. 30. O. g. N 3. Dec. 1. O. g. N 4. d. 6. S. g. O. 3. d. 14 S g W. 3 itidem d. 15. et 16. d. 24. S. g. O. 4. d. 26. et 27. S. 3.

Reliqua praeterimus, quia parum aut nihil notatu dignum occurrit. Progredimur igitur nunc ad anni 1750. obſeruationes.

Obſeruationes meteorologicae, potiſſimum barometricae et thermometricae, A. MDCCL St. V.

Barometri altitudines

| | Maximae. | | Minimae. | | Differentiae. |
|---|---|---|---|---|---|
| Ianuarii | 15. | 29. 10 – | 27. 70 | d. 2 – | – 1. 40 |
| Februarii | 17. | 28. 25 – | 26. 90 | d. 11 – | – 1. 35 |
| Martii | 24. | 28. 50 – | 27. 30 | d. 6 – | – 1. 20 |
| Aprilis | 11. | 28. 20 – | 27. 30 | d. 3 – | – 0. 90 |
| Maii | 14. | 28. 15 – | 27. 40 | d. 1 – | – 0. 75 |
| Iunii | 14. | 28. 19 – | 27. 55 | d. 29 – | – 0. 55 |
| Iulii | 66. | 28. 05 – | 27. 50 | d. 24 – | – 0. 55 |
| Auguſti | 25. | 28. 05 – | 27. 30 | d. 30 – | – 0. 75 |
| Septembr. | 16. | 28. 40 – | 27. 40 | d. 1 et 2 | – 1. 00 |
| Octobris | 7. | 28. 20 – | 27. 60 | d. 1 et 30 | – 0. 60 |
| Nouemb. | 21. | 28. 15 – | 27. 55 | d. 5. 6 et 7 | – 0. 60 |
| Decembr. | 28. | 28. 10 – | 27. 45 | d. 4 – | – 0. 65 |

Collatis

Collatis hiſce inter ſe obſeruationibus pateſcit ſummam huius anni mercurii altitudinem in tubo torricelliano fuiſſe 29 pollicum Pariſinorum et decem partium centeſimarum eiusdem pollicis. Eſt haec altitudo maior, omnibus ad hoc tempus obſeruatis, ſuperat enim maximam adhuc obſeruatam 29. 01 nouem partibus centeſimis pollicis Pariſini. Ergo nunc ſpatium variationum barometricarum mutandum, et nouem partibus centeſimis eſt amplificandum. Media quoque altitudo eſt mutanda, quae nunc eſt 27. 75½, quum antea fuerit 27. 71. Quum igitur huc vsque ſpatium variationum fuerit 2. 60: erit nunc 2. 69; ſcilicet a 26. 41 ad 29, 10. Contigit haec altitudo maxima huius anni Ianuarii 15 h. 7. p. m. Ipſo meridie erat 29. 05, et nocte quoque ſequenti; diei autem praecedentis veſperi 29. 00. Ventus erat non ſenſibilis, praecedente N et NgO debili diebus aliquot antecedentibus, ſubſeqnebatur O debilis die ſequenti, quem excipiebat W vehementior. Thermometrum erat 172. Minima altitudo 26. 90 eſt notata Februarii 11 ipſo meridie, coelo nubilo, vento SgO ſpirante mediocri. Die antecedenti erat 27. 60 et h 7. p. m. 27. 10. Calor diminutus erat ad 150, punctum ſcilicet congelationis. Pracedebat veſperi diei antecedentis SgO 3, et ſequebatur S debilis. Quum haec altitudo minima 26. 90 non ſuperet altitudinem minimam hic iam obſeruatam 26. 41; manet haec huc vsque adhuc minima. Pondus igitur atmoſphaerae hoc anno multum variatum fuit, dum ſpatium huius anni altitudinum mercurii variatarum fuit 2. 20.

 Calo-

Caloris variationes, ſecundum obſeruationes thermometricas, fuerunt ſequentes per ſingulos anni menſes.

| Calor minimus. | | Maximus. | | Differentia |
|---|---|---|---|---|
| Ianuarii 23. | 175 | — 148½ | d. 17. et 29 — — | 26½ |
| Februarii 14. | 175 | — 144½ | d. 22 — — | 26½ |
| Martii 8. | 172½ | — 126 | d. 30 h. 7. p. m. — | 46½ |
| Aprilis 7. | 151 | — 126½ | d. 27 — — | 24 |
| Maii 14. | 143 | — 114 | d. 31 — — | 29 |
| Iunii 4. | 137 | — 113½ | d. 16 — — | 23½ |
| Iulii 15 et 16. | 129½ | — 111½ | d. 22 — — | 18 |
| Auguſti 31. | 124½ | — 113 | d. 1 et 2 — — | 11½ |
| Septembr. 29 | 154½ | — 120 | d. 1 — — | 34½ |
| Octobris 24. | 170 | — 145 | d. 1 — — | 25 |
| Nouemb. 13. | 178 | — 160½ | d. 6 — — | 17½ |
| Decemb. 23. | 189 | — 160½ | d. 28 — — | 28½ |

Ex comparatione harum obſeruationum thermometricarum conſpicitur, ſummum frigus hoc anno fuiſſe Dec. 23. veſperi, dum calor ad 189 minutus fuit. Contigit hoc frigus ſub ſequentibus circumſtantiis. Meridie erat thermometrum 188, caelo per totum diem ſereno. Ventus debilis 1 ex oriente flauit, qui die quoque praecedenti et ſubſequenti ſpirauit; barometrum erat 27. 90. Hic frigoris gradus, dum gradum 200 alias hic obſeruatum non attingit, manet hic ad hoc tempus ſummus Petroburgi obſeruatus. Quamuis autem ſuperiores frigoris gradus ſaepius ſint obſeruati, poteſt tamen menſis December frigidiſſimis menſibus adnumerari. Variatio enim frigoris huius menſis fuit ab 160

ad

ad 189, et ſemel tantum ad 160 mercurius adſcendit, reliquis diebus, vt plurimum inter 70 et 80 frigus alternabat. Nam d. 8. 173. d. 9. 10. 11. 175. d. 12. 179. d. 13. 180 d. 14. 178. d. 15. et 16. 182. d. 17. 185. d. 18. 182. d. 19. et 21. 175. d. 22. 188. d. 24. 187. d. 25. 179. d. 26. 174. d. 29. 180 d. 30 et 31. 179. Ventus his frigoris gradibus in aere regnantibus vt plurimum fuit O debilis, vel nullus.

Vlterius ex datis obſeruationibus intelligitur calorem ſummum hoc anno fuiſſe $111\frac{5}{8}$. Obſeruatus hic eſt Iulii 22. h. 7. p. m. Coelum erat ſerenum, ventus auſtralis debilis 1. Idem ventus hunc diem anteceſſit, et ſequutus eſt per aliquot dies. Licet hic caloris gradus non adeo magnus ſit, tamen hic menſis ſatis calidus exiſtimandus eſt, quia vt plurimum inſigniores caloris gradus ſunt notati 112, 113, 114 etc. Inprimis notandus eſt menſis Auguſtus, qui ſolito calidior fuit. Et hoc menſe gradus 113, 114, 115, 116 frequentiſſimi fuerunt, quum contra menſe Iunio dies ſolito frigidiores occurrant, quod tamen non impedit, quo minus aeſtas pro ſatis calida haberi queat. Venti procelloſi fuerunt Martii 15, 19, 21, 28. Aprilis 19. Maii 6. Iulii 16. Reliqua, minus notatu digna, praeterimus

Hactenus pertinent obſeruationes in obſeruatorio inſtitutae ſupra planum maris Baltici 51 pedes Pariſinos alto. Quae nunc ſequuntur ab anno 1751 domi a me ſunt inſtitutae ſupra planum maris 15 pedes circiter.

## A. MDCCLI. ST. V.

Barometri altitudines

| Menſes. | Dies. | Maxima | - - | Minima | - - | Differentia |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ianuarii | 21. | 28. 70 | - - | 27. 50 | die 26 - - | 1. 20 |
| Februarii | 4. | 28. 57 | - - | 27. 35 | - 28 - - | 1. 22 |
| Martii | 24. | 28. 42 | - - | 27 30 | - 4 - - | 1. 12 |
| Aprilis | 6. | 28. 32 | - - | 27. 65 | - 19 - - | 0. 67 |
| Maii | 19. | 28. 35 | - - | 27. 50 | - 5 - - | 0. 80 |
| Iunii | 5. | 28. 20 | - - | 27, 50 | - 12 - - | 0. 70 |
| Iulii | 22. | 28. 15 | - - | 27. 43 | - 30 - - | 0. 72 |
| Auguſti | 26. | 28. 45 | - - | 27. 65 | - 31 - - | 0. 80 |
| Septemb. | 23. | 28. 60 | - - | 27. 15 | - 2 - - | 0. 45 |
| Octobris | 2. | 28. 75 | - - | 27. 15 | - 28 - - | 1. 60 |
| Novemb | 28. | 28. 65 | - - | 27. 40 | - 6 - - | 1. 25 |
| Decemb. | 20. | 28. 60. | - - | 27. 20 | - 11 - - | 1. 40 |

Collatis his barometri altitudinibus inter ſe, patet earum maximam fuiſſe hoc anno menſe Octobri 28. 75. Obſeruata eſt die 3 circa meridiem, coelo ſereno, thermometro gradum 140 indicante, vento variabili. Nox ſequens fuit ſerena, et lux borealis conſpecta eſt. Minima altitudo huius anni fuit 27. 15 eiusdem menſis die 28, thermometro 149 monſtrante, coelo nubilo W leniter flante. Fuit igitur inter altitudinem maximam 28. 75 et minimam 27 15 differentia huius anni maxima 1. 60, quae quum minor ſit ea maxima, quae in antecedentibus obſeruationibus 1750 eſt notata, ſcilicet 2. 69; manet hoc ſpatium variationum barometricarum inuariatum, quum altitudo maxima et minima

minima, cum altitudine media, eaedem perſtent anno ſuperiori deprehenſae. Caeterum variationes barometricas menſtruas primis et vltimis anni menſibus et hoc anno fuiſſe maiores, in mediis autem minores, conſpicitur.

Quae hoc anno 1751 variationes caloris ſe conſpiciendas praebuerunt, ex ſequenti tabella adparet.

| Menſis. | Dies. | Calor minimus. | | Maximus. | | | | Differentia |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ianuarii | 21. | 180 | - | 151 | die | 25 | - | 29 |
| Februarii | 5. et 6. | 192½ | - | 148 | - | 24 | - | 44½ |
| Martii | 24. | 161 | - | 134 | - | 29 | - | 27 |
| Aprilis | 8. | 149 | - | 124 | - | 24 | - | 25 |
| Maii | 2. | 146 | - | 118 | - | 31 | - | 28 |
| Iunii | 9. | 147 | - | 111 | - | 20 | - | 36 |
| Iulii | 11. | 132 | - | 105 | - | 6 | - | 27 |
| Auguſti | 24. | 139 | - | 106 | - | 6 | - | 34 |
| Septembris | 27. | 141 | - | 127 | - | 26 | - | 14 |
| Octobris | 22. | 156 | - | 138 | - | 5 | - | 18 |
| Nouembris | 25. | 165 | - | 149 | - | 9 | - | 16 |
| Decembris | 22. | 172 | - | 149 | - | 5 | - | 23 |

Ex comparatione harum obſeruationum igitur adparet maximum frigus hoc anno fuiſſe 192½, obſeruatum Februarii die 5 et 6 h. 8. a. m. monſtrante barometro 28 45, exiſtente nebula quadam, vento N g W leniter ſpirante. Nox ſequens fuit ſerena, vti quoque antecedens cum luce boreali. Calor maximus fuit 105, notatus Iulii die 6to, oſtendente barometro 27. 90, coelo ex parte nubibus obducto, vento vix ſenſibili. Fuit igitur diminutio caloris a gradu 105 ad 192½ adeoque ſpatium variationum thermometricarum maximum

mum per totum annum 87½ graduum; ergo minus illo, quod in antecedentibus obſeruationibus eſt notatum, ſcilicet 96. Huc vsque igitur manet gradus 104 caloris maximus, et minimus, ſeu frigus maximum, 200. Caeterum quoque conſpicitur hiemem ſatis frigidam, aeſtatem autem minus calidam fuiſſe. Minima variatio caloris fuit menſe Septembri 14 graduum et maxima 44½ menſe Februario. Quum breuitati hic ſtudendum ſit, reliqua meteora praeterimus, quia nihil, quod praecipue notatu dignum ſit, in illis occurrit. Nihil igitur obſtat, quo minus ſtatim ad enarrandas obſeruationes anni ſequentis 1752. progredi queamus.

## A. MDCCLII.

### Barometri altitudines.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Ianuarii | 29 | 28. 35 | 27. 00 | Die 2 et 7 | 1. 35 |
| Februarii | 6 | 28. 73 | 27. 25 | 1 | 0. 88 |
| Martii | 23 | 28. 45 | 27. 00 | 10 | 1. 45 |
| Maii | 5 et 10 | 28. 40 | 27. 65 | 29 | 0. 90 |
| Iunii | 19 | 28. 20 | 27. 75 | 7 | 0. 45 |
| Iulii | 16 et 17 | 28. 22 | 27. 70 | 4 et 5 | 0. 52 |
| Auguſti | 9 et 10 | 28. 40 | 27. 50 | 23 | 0. 90 |
| Septembris | | 28. 63 | 27. 70 | 16 | 0. 93 |
| Octobris | 1 | 28. 60 | 26. 70 | 25 | 1. 90 |
| Novembris | 6 | 28. 47 | 27. 65 | 14, 17. 18 | 0. 82 |
| Decembris | 24 | 28. 82 | 26. 95 | 9 | 1. 87 |

Manifeſtum igitur eſt, ex hiſce obſeruationibus inter ſe comparatis, maximam barometri altitudinem fuiſſe 28. 82 notatam Decembris die 24 h. 6 p. m. coelo nubi-

nubibus tecto. Vento S O leniter flante, thermometro 161 monſtrante. Dies antecedentes fuerunt nubili, ſequentes vero tres ſereni, continuante eodem vento. Minima altitudo barometri obſeruata eſt menſe Octobri de 25. h. 2. p. m. quae eſt 26. 70 coelo nubilo et pluuio, thermometro 146$\frac{1}{2}$ vento S O vehementiſſime flante. Die ſequenti 26 aquae Neuae fluuii ripas exceſſerunt, vento N W vehementiſſimo, ſequuti ſunt deinde dies aliquot ſereni. Ergo maxima variatio barometri per totum annum fuit 2. 12 adeoque $\frac{52}{100}$ maior, quam anno praecedentei, quo nempe fuit 1. 60. Spatium variationum barometricarum maximum 2. 69 in antecedentibus ſtabilitum, huius anni obſeruationibus non mutari, per ſe patet, vti quoque clarum eſt, variationes menſtruas et hoc anno primis et vltimis menſibus fuiſſe maiores, mediis autem minores. Variatio menſtrua maxima hoc anno fuit menſe Octobri 1. 90 et minima $\frac{52}{100}$ menſe Iulio.

Variationem caloris huius anni MDCCLII monſtrant ſequentes obſeruationes thermometricae.

Caloris diminutiones.

| Menſis. | Dies. | Maxima. | Minima. | Differentia. |
|---|---|---|---|---|
| Ianuarii | 13. | 187 - | 147 die 16 et 26 - - | 40 |
| Februarii | 17. | 172 - | 146 - 1 - - - - | 26 |
| Martii | 9. | 162 - | 133 - 26 - - - - | 29 |
| Aprilis | 1 et 9. | 153 - | 114 - 29 et 30 - - | 39 |
| Maii | 11. | 147 - | 122 - 28 - - - - | 25 |
| Iunii | 9 et 11. | 135$\frac{1}{2}$ - | 104 - 23 - - - - | 31$\frac{1}{2}$ |
| Iulii | 22 et 30. | 128 - | 104$\frac{1}{2}$ - 16 - - - | 23$\frac{1}{2}$ |
| Auguſti | 12. | 135 - | 107 - 4 - - - - | 28 |

mum per totum annum 87½ graduum ... ... 18
in antecedentibus obſeruationib ... ... 25
96. Huc vſque igitur ... ... 31½
maximus, et minimus, ſem ... ... 28.
terum quoque conſpicitur ... em dimi-
tem autem minus cali ... incidit in
loris fuit menſe Septem ... atus Iunii
ſe Februario. Qu ... 94 ad 187
meteora praeter ... hic caloris
dignum ſit, ... poli ſaepius
minus ſtati ... radus maxi-
1752. p ... am hic ob-
... iatio caloris
... menſtrua va-
... nima autem
... or eſt, quam
... Progredimur ad

## A. MDCCLIII.

Barometri altitudines.

| Menſes | Dies. | Maxima. | | Minima. | D. | | Differentia |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ianuarii | 26. | 28. 98 | – | 28. 00. | 22 | – – | 0. 98 |
| Februarii | 16. | 28. 77 | – | 27. 37. | 9 | – – | 1. 40 |
| Martii | 17 et 18. | 28. 55 | – | 27. 48. | 11 | – – | 1. 07 |
| Aprilis | 27. | 28. 28 | – | 27. 52. | 22 | – – | 0. 76 |
| Maii | 18. et 19. | 28. 45 | – | 27. 75. | 2 | – – | 0. 70 |
| Iunii | 17. et 18. | 28. 35 | – | 27. 75. | 9 | – – | 0. 60 |

Iulii

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Iulii | 16. et 17. | 28. 05 | - | 27. 63. | 2 | - - | 0. 42 |
| Auguſti | 23. | 28. 40 | - | 27. 87. | 10 | - - | 1. 47 |
| Septembris | 27. | 28. 58 | - | 27. 55. | 14 | - - | 1. 03 |
| Octobris | 11. | 28. 67 | - | 27. 35. | 25 | - - | 1. 32 |
| Nouembris | 20. | 28. 47 | - | 27. 45. | 16 | - - | 1. 02 |
| Decembris | 17. | 28. 50 | - | 27. 40. | 20 | - - | 1. 10 |

Ergo maxima per integrum annum altitudo fuit 28. 98, minima 27. 35, variatio igitur annua 1. 63. Maxima barometri altitudo notata eſt Ianuarii 26 circa meridiem. Coelum erat nubilum, et ningebat quoque paullisper, vento O leniter flante, qui paullo poſt in SO mutatus eſt. Dies antecedentes et conſequentes aliquot fuerunt nubili, thermometrum monſtrabat gradum 159.

Minima altitudo obſeruata eſt menſis octobris die 25 circa meridiem, coelo nubilo et pluente, Vento W oſtendente, thermometro 147. Dies proxime antecedentes fuerunt nubili, ſequentes vero duo ſereni. Fuit igitur variatio maxima barometrica hoc anno 1. 63, adeo minor $\frac{49}{100}$ quam anno praecedenti, quo fuit 2. 12. Me non monente porro adparet, variationes altitudinum mercurii primis et vltimis menſibus et hoc anno fuiſſe maiores, minores vero in mediis. Minima variatio menſtrua fuit $\frac{42}{100}$ et maxima 1. 47, illa Iulii, haec menſe Auguſto eſt obſeruata. Ceterum a ſumma et infima altitudine huius anni, et variatione hac annua ſpatium variationum barometricarum non mutari, in antecedentibus obſeruationibus deprehenſum, nemo non videt.

Progredimur ad recenſendas variationes caloris huius anni thermometro indicatas.

Obſeruationes thermometricae A. MDCCLIII.

| Menſes. | Dies. | Frigus max. | | Calor max. | D. | | | Differentia. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ianuarii | 1. | 177 | - | 150. | 16 | - | - | 27 |
| Februarii | 7. | 179 | - | 142. | 22 | - | - | 37 |
| Martii | 26 et 27. | $158\frac{1}{2}$ | - | $136\frac{1}{2}$. | 19 | - | - | 22 |
| Aprilis | | $152\frac{1}{2}$ | - | $123\frac{1}{2}$. | 20 | - | - | 29 |
| Maii | 3. | 124 | - | $111\frac{1}{2}$. | 9 | - | - | $32\frac{1}{2}$ |
| Iunii | 3. | 138- | - | $107\frac{1}{2}$. | 22 | - | - | $30\frac{1}{2}$ |
| Iulii | 3. | $132\frac{1}{2}$ | - | $111\frac{1}{2}$. | 10 | - | - | 21 |
| Auguſti | 23. | $135\frac{1}{2}$ | - | $116\frac{1}{2}$. | 4 et 9 | - | - | 19 |
| Septemb. | 16. | 143 | - | $121\frac{1}{2}$. | 8 | - | - | $22\frac{1}{2}$ |
| Octobris | 31. | $159\frac{1}{2}$ | - | 133. | 6 | - | - | $26\frac{1}{2}$ |
| Nouemb. | 21. | 163 | - | 141. | 17 | - | - | 22 |
| Decembr. | 18. | 165 | - | 150. | 3 | - | - | 15 |

Ex collatis hiſce obſeruationibus inter ſe pateſcit, maximum frigus totius anni fuiſſe 179, minimum, ſeu maximum calorem, $107\frac{1}{2}$ adeoque differentiam annuam $71\frac{1}{2}$. Contigit igitur diminutio caloris maxima menſis Februarii die 7. h. 8. a. m, coelo ſereno, Vento N 2. Dies antecedens fuit quoque ſerenus, ſequens autem nubilus et pluuius. Barometri altitudo fuit 28. 05, et circa meridiem 28. 13, dein altitudo haec minui coepit. Minima caloris diminutio, ſiue maximus calor, accidit menſe Iunio, die 22 circa meridiem, coelo ſereno, barometri altitudine exiſtente 28. 15. Dies ſequens ſerenus fuit, ſed cum vento vehementiſſimo N W. Dies

Dies proxime antecedentes quoque fuerunt ſereni. Comparata ſumma et infima caloris diminutione conſpicitur variationem caloris annuam fuiſſe graduum $71\frac{1}{2}$ ſcilicet ab $107\frac{1}{2}$ ad 179, adeoque $11\frac{1}{2}$ minorem, quam anno praecedenti. Minima caloris variatio menſtrua fuit 15, menſe Decembri, quae admodum exigua eſt notata, maxima $32\frac{1}{2}$ menſe Maio obſeruata. Fuerunt igitur hoc anno variationes caloris et frigoris menſtruae non admodum magnae, et, quum differentia, ſeu variatio thermometrica annua minor quoque ſit differentia et variatione in antecedentibus obſeruationibus notata, manet, vti ſummus frigoris et caloris gradus idem; ſic quoque eadem maxima variatio in antecedentibus obſeruationibus deprehenſa. Huius anni hiemem ſatis mitem, et aeſtatem ſatis temperatam fuiſſe, ex hiſce ſatis quoque eſt apertum.

## A. MDCCLIV.

Quae fuerunt hoc anno 1754 variationes altitudinum mercurii in tubo Torricelliano, adeoque ponderis atmoſphaerae hic Petroburgi, ſequentes obſeruationes oſtendunt.

Altitudines barometri ſummae et infimae per ſingulos anni huius menſes cum differentiis.

| Menſis | D. | Maxima. | | Minima. | D. | | Differentia |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ianuarii | 30. | 28. 38 | - | 27. 09. | 8 | - | - 1. 33 |
| Februarii | 16. | 28. 45 | - | 27. 07. | 12 | - | - 1. 38 |
| Martii | 14. | 28. 90 | - | 27. 20. | 4 | - | - 1. 70 |
| Aprilis | 1. | 28. 70 | - | 27. 70. | 4 | - | - 1. 00 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Maii | 11. | 28. | 50 | - | 27. | 55. | 4 | - - | 0. | 95 |
| Iunii | 7. | 28. | 15 | - | 27. | 68. | 19 | - - | 0. | 47 |
| Iulii | 13. | 28. | 47 | - | 27 | 65. | 4 | - - | 0. | 82 |
| Auguſti | 24. | 28. | 47 | - | 27. | 48. | 29 | - - | 0. | 99 |
| Septembr. | 15. | 28. | 45 | - | 27. | 35. | 24 | - - | 1. | 35 |
| Octobris | 8. | 28. | 40 | - | 27. | 00. | | - - | 1. | 40 |
| Nouembr. | 29. | 28. | 47 | - | 27. | 23. | 25 | - - | 1. | 24 |
| Decembr. | 18. | 28. | 65. | - | 27. | 85. | 22 | - - | 0. | 80 |

Secundum has obſeruationes ſumma mercurii altitudo per totum annum fuit 28. 90, notata menſe Martio die 14 h. 8. a. m. Thermometrum indicabat gradum 150, coelum ſereniſſimum erat, vti quoque dies antecedens, et aliquot ſequentes fuerunt ſereni. V. ONO mediocri. Minima altitudo fuit 27. 00 Octobris 14 h. 7. a. m. obſeruata, coelo nubilo et pluuio, V. S. qui paullo poſt in W mutatus eſt. Thermometrum indicabat gradum 139. Dies antecedens et conſequens quoque nubili et pluuii fuerunt. Hinc pateſcit, maximam differentiam toto anno, ſeu variationem annuam mercurii altitudinum, fuiſſe 1. 90 adeoque $\frac{27}{100}$ maiorem, quam anno praecedenti. Quum ſumma huius anni altitudo non ſuperet illam, quae in antecedentibus obſeruationibus ſumma deprehenſa eſt; manet illa inuariata. Minima quoque huius anni altitudo minor eſt minima, iam in antecedentibus obſeruationibus indicata, hinc et illa minima adhuc manet. Idem valet quoque de ſpatio variationum barometricarum maximo, quod idem perſtat, quum hoc ſpatium variatio-

nis

nis annuae minus illo deprehendatur. Et hoc anno lex obtinet, variationes barometricas primis et vltimis anni menſibus, quam in mediis, eſſe maiores, licet variatio menſe Decembri ſatis ſit exigua. Maxima variatio menſtrua fuit 1. 70 menſe Martio, et minima $\frac{45}{100}$ menſe Iunio notata. Variationes caloris huius anni ex ſequentibus obſeruationibus thermometricis pateſcunt.

Summi gradus frigoris et caloris per ſingulos menſes A. MDCCLIV thermometro obſeruati.

| Menſes. | D. | Frig. maximum | | Calor max. | D. | | Differentia. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ianuarii | 16 et 21. | 185 | - | 151. | 11 | - - | 34 |
| Februarii | 7. | 177½ | - | 144. | 12 | - - | 33½ |
| Martii | 5 et 7. | 171 | - | 132. | 30 | - - | 39 |
| Aprilis | 23. | 148 | - | 123. | 13 | - - | 25 |
| Maii | 5 et 16. | 148 | - | 108. | 21 | - - | 40 |
| Iunii | 4. | 136 | - | 111½. | 10 | - - | 25 |
| Iulii | 29. | 132½ | - | 105½. | 18 | - - | 27 |
| Auguſti | 28. | 139 | - | 120. | 5 et 24 | - - | 19 |
| Septembris | 15. | 148 | - | 122. | 1 | - - | 26 |
| Octobris | 30. | 156 | - | 133½. | 2 | - - | 22½ |
| Nouembris | 22. | 188 | - | 141. | 4 | - - | 46½ |
| Decembris | 25. | 185½ | - | 148. | 13 | - - | 37½ |

Comparatis hiſce obſeruationibus inter ſe, apertum eſt, ſummum frigoris gradum hoc anno fuiſſe 188, qui, quum ſit minor illo ſummo, ſcilicet 200, qui iam in antecedentibus obſeruationibus eſt notatus, huc vſque ille ſummus manet. Euenit ſummus frigoris gradus huius

jus anni Nouembris 22 h. 7. a. m, altitudine barometri exiſtente 28. 13, coelo ſereno. Nox praecedens erat quoque ſerenisſima, ſequens autem nubila, et paulliſper pluebat. Ventus fuit S g O, qui ſequenti die in SO mutatus eſt. Summus caloris gradus igitur fuit 105½ Iulii 18 h. 3. p. m. obſeruatus, barometro monſtrante 28. 20, V. S. coelo ſereno a. m. ſed p. m. tempeſtas ingens orta eſt cum fulminibus et tonitru vehementiſſimo ac pluuia magna. Eluceſcit hinc variationem caloris annuam fuiſſe graduum 82½ adeoque 11 gradibus maiorem, quam anno praecedenti. Quia hic ſummus caloris gradus minor eſt ſummo alias iam hic obſeruato, ille ſummus adhuc manet, et variatio quoque caloris maxima quoque eadem manet. Variatio caloris menſtrua maxima hoc anno fuit 46½ graduum, notata menſe Nouembri, minima vero die 19 menſis Auguſti. Hic ſubſiſtendum in praeſenti eſt, quod ad communicationem obſeruationum meteorologicarum Petroburgenſium attinet: Priusquam autem finem faciamus, adiungendae ſunt obſeruationes Barometricae et Thermometricae Sinicae, itemque Magneticae, quarum mentionem ſub initium fecimus, et quas ſimul communicare promiſimus.

Accepit nempe Academia a R. P. Miſſionariis Gallicis Pekini verſantibus, obſeruationes quasdam, 1755, inter quas et Barometricae et Thermometricae occurrunt, quae Pekini ab iis factae ſunt, potiſſimum a R. P. Amiot Societatis Ieſu. Exiſtimaui, operae pretium eſſe, inſigniores extrahere, et cum noſtris comparare. Ad barometricas igitur quod attinet, maxima altitudo Pekini

Pekini ad annum vſque 1755 obſeruata, eſt 27 pollicum Pariſinorum et 4 linearum. Haec altitudo maxima non inſignis eſt, non enim attingit mediam Petropolitanam quae fuit 27. 71 ad annum 1750 vſque, et nunc 27 75, quum haec ſit tantum 27. 33$\frac{1}{2}$. Minima autem altitudo Pekini obſeruata, eſt 25 pollicum Pariſini pedis et 10 linearum. Haec altitudo minima, minor eſt minima Petroburgi adhuc notata, quum haec ſit 26. 41, Sinica autem 25. 83, adeoque 58 partibus centeſimis minor Petroburgenſi. Quum tota variatio ſit tantum 1. 50: facile conſpicitur, ſpatium quoque variationis minus eſſe Pekini, quam Petropoli, quod fuit antea ad 1750 2. 60, nunc autem 2. 69.

Thermometricae obſeruationes, quae complectuntur annum 1752, 1753 et 1754 ſunt factae ſecundum thermometrum Reaumurianum ſpiritu vini repletum. Caloris inſignioris 1752 initium notatum eſt Iulii 25, quo gradus caloris 26 ſupra punctum congelationis fuit, Iulii autem 26. 27. 28. 29. 30 et 31 ſpiritus vini adſcendit ſucceſſiue vsque ad 29 ſupra congelationis punctum.

Auguſti 1 erat 29$\frac{1}{2}$ ſupra punctum congelationis.
– – 2 – – 29$\frac{1}{2}$.
– – 3 – – 30
– – 4 – – 30$\frac{1}{2}$
– – 5 – – 31. Inter 5$^{tum}$ ad 10$^{um}$ inter 27 et 29 ſubſtitit.

Die 10 rurſus erat 30$\frac{1}{2}$.

D. 11 deſcendit ad 26½ quem gradum non amplius hoc anno ſuperauit.

1753.

Iulii 9 primus inſignior caloris gradus eſt obſeruatus ſcilicet 32½ ſecundum eandem ſcalam Reaumurianam. Hic gradus maximus per totum annum fuit.

1754.

Hoc anno Iunii 4^{ta} iam magnus calor eſſe coepit, dum ſpiritus vini ad 30 ſupra congelationem adſcendit h. 3 et 4. p. m. Die 5 gradus caloris erat 31, qui maximus hoc anno manſit. Frigus ſummum adhuc Pekini obſeruatum eſt 13 graduum infra punctum congelationis ſcalae Reaum. Inſignores frigoris gradus ſunt inter 10 et 13, annis ſcilicet communibus.

Quodſi in ſcala Reaumuriana punctum congelationis, quod cifra nullitatis nota indicat, ponatur = 150 noſtri thermometri ſecundum ſcalam Delislianam, et 80 = 0 punctum caloris aquae bullientis: conſpicitur ſummum frigus Pekini adhuc obſeruatum, ſcilicet 13 infra congelationem, ſecundum ſcalam noſtram efficere gradus 174⅜, qui gradus frigoris non adeo magnus hic Petropoli eſt. Inſigniores igitur frigoris gradus inter 168 et 174 variantur, decem enim gradus infra congelationem ſcalae Reaumurianae aequales ſunt 168⅞ Delislianis.

Comparatis inter ſe caloris gradibus, patet inſigniores caloris gradus variari inter 26 et 32½ ſupra punctum congelationis ſcalae Reaumurianae. Quum igi-

tur

tur 26 gradus ſcalae Reaumurianae, ſint aequales $101\frac{1}{4}$, et $32\frac{1}{4}$ conueniant cum thermometri noſtri 89, intelligitur, variationem caloris inſignioris inter 101 et 89 ſubſiſtere. Quamuis haec comparatio ſcalae Reaumurii cum noſtra exacta eſſet, ſi vtraque thermometra mercurio eſſent repleta: tamen pro minus exacta eſt reputanda in thermometris ſpiritu vini repletis Reaumurii, quia exacte concordantia non ſunt, neque eſſe poſſunt, quum ſpiritus vini gradum caloris aquae bullientis recipere nequeat, quod alibi iam fuſius eſt monſtratum, neque ſpiritus vini eiusdem bonitatis facile reperiatur. Inter has obſeruationes Sinicas reperiuntur quoque magneticae, quae licet proprie ad meteorologicas non pertineant, tamen potiores locum hic commode reperiri poſſe exiſtimamus. Primum notatu digniſſimum occurrit, quod declinatio magnetis a triginta et amplius inde annis conſtans reperiatur. Declinat enim 2 gradibus a borea occidentem verſus. Notatu dignior adhuc eſſet obſeruatio ad inclinationem magnetis ſpectans, ſi pro vera haberi poſſet, ſcilicet, quod inclinatio cuſpidis auſtralis, non boreae, vt ſolet, Pekini fieret: quia autem Reuer. Auctor hanc obſeruationem, licet ſaepius repetitam, ipſe dubiam declarauit, quia obſeruationem aliam huic contrariam alia acu magnetica conſpexit, vbi ſcilicet cuſpis auſtralis more ſolito ſupra horizontem attollebatur; certiora ſunt expectanda, quae dare promiſit **. Declinatio acus magneticae hic Petropoli quoque non admodum inconſtans videtur.

Ddd 2 Nam

** Seruauit promiſſum R. P. in literis ad Academiam 1757 rurſus datis. Ex experimentis vna eademque acu magnetica factis conclu-

Nam quotieſcunque declinationem acus magneticae hic Petroburgi obſeruauimus; deprehendimus ſemper cuſpidem boream inter gradum quartum, et quartum et dimidium, occidentem verſus ſubſtitiſſe. Declinatio vero 4 graduum occidentem verſus hic eſt obſeruata iam a multis inde annis, aut vti Krafftius eam praeciſe a. 1741 determinare conatus eſt 3° 56′ 1″. V. Commentariorum veterum Tom. XIII. p. 381. Notandum tamen eſt, hanc declinationem ſaepius tempore non adeo diuerſo non ſatis regularem eſſe deprehenſam, licet eadem inſtrumenta fuerint adhibita, in quibus vitium nullum detegi potuit, neque circumſtantiae temporis admodum diuerſae fuerint. Maximam irregularitatem autem monſtrant obſeruationes magneticae in Sibiria factae. Differentia inſignis ſaepius inter obſeruationes declinationis magneticae in eodem loco, diuerſo non adeo tempore, factas, deprehenſa eſt, vti vel ſequentes potiores demonſtrare poſſunt. A. 1735. Ianuarii 24 et 27 declinatio deprehenſa eſt Krasnoiarii 2° occidentem verſus. Die autem 31 erat 1°, et Februarii 10, 1° 45′, Februarii 17, 1° 30′. Eodem anno Martii 21 et 22 Ircuti erat declinatio 1° 15′. Octobris autem 28, 1° 30′, die 31, 30′; Nouembris 4, 1°

dit, diuerſam hanc inclinationem pendere a diuerſo modo acum virtute magnetica imbuendi, ita vt inclinatio fiat auſtralis, ſi polo magnetis boreali vis magnetica in acu excitetur, ita vt initium ductus fiat in extremo, quod meridiem verſus ſe conuertere debeat, borealis autem, ſi contraria ratione fiat polo auſtrali excitatio magnetica. Quum Auctor adfirmet multis experimentis repetitis ſe hanc legem deprehendiſſe, ſupereſt vt inquiratur, vtrum ſit vniuerſalis ubique locorum.

4, 1° 30'; die 19, 1° 45' occidentalis ſemper. Selengiae declinatio Aprilis 3 nulla vel vix ſenſibilis, ſed Aprilis 15 erat 30' et Maii 21 et 22, 2° 45' occidentem verſus.

In oppido Kiachtenſi declinatio erat Aprilis 30, 3° Maii 4. 2° 45' occidentem verſus.

In munimento Ierawnienſi Iunii 1 et 2 declinatio eſt notata 4° occidentalis.

In vrbe Nertſchinsk a 17 ad 28 Iunii ſemper eadem 3° occidentem verſus erat declinatio.

In officinis Argunenſibus intra 14 et 24 Iunii declinatio magnetis ſemper erat 3° occid.

In oppido Zuruchaitu Iulii 30 et 31 declinatio magnetis 3° 15' occidentem verſus eſt deprehenſa.

In oppido Vdinsk inter 24 Aug et 10 Sept. declinatio magnetis perpetuo erat 3° 15' occ. Haec differentia notabilis declinationis magnetis in eodem loco, tempore parum diuerſo notata, non ſolum a Gmelino, ſed etiam a La Croyerio Ircuti eſt deprehenſa, licet ſumma cura vbique fuerit adhibita. Maiorem adhuc irregularitatem monſtrant obſeruationes pro inclinatione magnetis in diuerſis Sibiriae locis captae, vti quoque ſequentes oſtendere poſſunt omni cura et diligentia factae.

In vrbe Krasnoiarsk 1735. Ianuarii 27. h. 12. m. erat inclinatio primum ſecundum meridianum magneticum 30° 15' ſecundum plagas veras N. 30° S. 43°. O. 35° W. 35°, Barometro 28. 25, Thermometro 197, Vento 00, coelo ſereno.

Februarii 1. h. 12. m. ſecundum merid. magneticum 28° 15'; ſecundum plagas veras Septemtriones 29°, Meridiem 14°, Orientem 33° 30', Occidentem 34°, Barometro 28, 06, Thermometro 190, Vento SO, coelo ſereno.

Februarii 10. h. 12. m. ſec. Mer. magn. 29°. N 28°. 45°; S 41°; O 33° 30'; W 34° Barometro 27. 28, Thermometro 171, Vento O S O 1; coelo tenuibus nubibus obducto.

Februarii 17. h. 9. a. m. Mer. magn. 29° N. 28° 45' S 41°. 30'; O 34° W 34°; Barometro 27. 20'; Thermometro 161; Vento S W g S. 2; niue pauca cadente.

In vrbe Irkutzk Martii 22. h. 8. a. m. Merid. magn. 27°; N 27°; S. 40°; O 32°; W 31° 15'; Vento S W 1; ſole per nubes tenues lucente.

In vrbe Selenginſk Aprilis 3. h. 6. p. m. Mer. magn. 21° 45'; N 21° 45'; S 35°; O 27°; W 27°; Barometro 26. 18; Thermometro 135; Vento N 1; coelo fere ſereno.

Aprilis 15. h. 6. p. m. Mer. magn. 21° 45'; N 21° 45', S 35°, O 27°, W 27°, Barometro 26. 25, Thermometro 130, Vento N 1, coelo nubilo.

Maii 22. h. 4. p. m. Mer. magn. 21° 30' N 21°; S. 34° 45'; O 27° 30', W 26°; Barometro 26 15, Thermometro 104, Vento N N O 3, coelo occidentem verſus ſpiſſis nubibus obducto.

In oppido Kiachta Aprilis 30 h. 12. m. Mer. magn. 21° 30'; N 20° 45'; S 35° 30'; O 27° 30'; W 26°; Barometro 25. 38, Thermometro 137, Vento SSO 1 coelo nubilo.

Maii

Maii 4. h. 12. m. Mer. magn. 20°, N 20° 30', S 34°, O 26° 25', W 26°, Barometro 25. 52, Thermometro 135, Vento N N W. 2, coelo nubibus variegato.

In munimento Ierawnienſi Iunii 1. h. 5. p. m. Mer. magn. 27°, N 26° 30', S 40° 15', O 32° 33', W 32° 39', Thermometro 125, Vento 00, coelo ſereno.

In vrbe Nertſchinsk Iunii 24. h. 6. p. m. Mer. magn. 22°, N 22° 30', S 35°, O 27°, W 25°, Barometro 26. 30, Thermometro 114, Ventus inconſtans, coelo ſereno.

Iunii 28. h. 3. p. m. Mer. magn. 26° 15', N 26° 30', S 40° 45', O 31° 45', W 31° 30'.

Quamuis in his obſeruationibus pro inclinatione magnetis captis nihil omiſſum ſit, quod ad accurationem earum pertinere Auctor Gmelinus exiſtimauit; ſuſpectae tamen ipſi viſae ſunt, quoniam in eodem loco, ſaepius tantopere diſſident. In inſtrumento vitium nullum ab eo detegi potuit. Cum igitur haec irregularitas vitioſis obſeruationibus tribuenda vix videatur, eritne adſcribenda, vel territorii conſtitutioni, particulis ferreis impraegnatae, vel etiam qualitati atmoſphaerae, vel ipſi motui fluidi magnetici? quod quidem disquiri hic et nunc non poteſt.

---

OBSER-

# OBSERVATIONES METEOROLOGICAE, FACTAE TVBINGAE, ANNIS 1750 ET 1751.

Auctore

*GEO. WOLFFG. KRAFFT.*

§. 1.

Barometro, atque Thermometro, in ſitu aptiſſimo, vti ſuperius indicaui, pendentibus, menſtruae altitudines maximae et minimae Barometri ſunt ſequentes, quas cum differentiis ſuis hic appono, intelligendo pedis Londinenſis pollices duodecimales, eorumque partes centeſimas.

| Anno. | Menſe | max. | min. | diff. |
|---|---|---|---|---|
| 1750. | Ian. | 29. 28 | 28. 62 | 0. 66 |
| | Febr. | 29. 05 | 28. 19 | 0. 86 |
| | Mart | 29. 22 | 28. 39 | 0. 83 |
| | Apr. | 28. 86 | 28. 10 | 0. 76 |
| | Mai. | 28. 84 | 28. 09 | 0. 75 |
| | Iun. | 28. 93 | 28. 20 | 0. 73 |
| | Iul. | 28. 88 | 28. 41 | 0. 47 |
| | Aug. | 28. 88 | 28. 21 | 0. 67 |
| | Sept. | 28. 98 | 28. 30 | 0. 68 |
| | Oct. | 29. 03 | 28. 15 | 0. 88 |
| | Nou. | 29. 00 | 27. 78 | 1. 22 |
| | Dec. | 29. 09 | 28. 07 | 1. 02 |

1751.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1751. | Ian. | - - 29. 03 | - - 28. 08 | - - 0. 95 |
| | Febr. | - - 29. 10 | - - 27. 98 | - - 1. 12 |
| | Mart. | - - 28. 85 | - - 27. 90 | - - 0. 95 |
| | Apr. | - - 28. 97 | - - 28. 00 | - - 0. 97 |
| | Maio | - - 28. 89 | - - 28. 20 | - - 0. 69 |
| | Iun. | - - 28. 98 | - - 28. 32 | - - 0. 66 |
| | Iul. | - - 28. 79 | - - 28. 26 | - - 0. 53 |
| | Aug. | - - 28. 89 | - - 28. 40 | - - 0. 49 |
| | Sept. | - - 28. 90 | - - 28. 40 | - - 0. 50 |
| | Oct. | - - 29. 03 | - - 28. 25 | - - 0. 78 |
| | Nou. | - - 29. 13 | - - 27. 80 | - - 1. 33 |
| | Dec. | - - 28. 90 | - - 28. 35 | - - 0. 55 |

Ex quibus apparet, manere adhuc maximam altitudinum hic loci obſeruatarum 29. 36, quae anno 1746 obſeruata fuit; et minimam earundem 27. 64, viſam anno 1749; eandemque differentiam maximam 1. 72, adeoque mediam Barometri altitudinem 28. 50, nulla habita inſtrumenti ſupra Nicri fluuii libellam eleuati ratione, quae proxime 60 pedes Londinenſes explet.

§. 2. Ex obſeruationibus Thermometri *Farenheitiani* ſequentem exhibeo Tabellam, quae cuiuscunque menſis oſtendit gradum caloris maximum et minimum, cum differentia vtriusque.

| Anno | Menſe | max. | min. | diff. |
|---|---|---|---|---|
| 1750. | Ianuar. | 39 | 18 | 21 |
| | Febr. | 58 | 12 | 46 |
| | Mart. | 62 | 27 | 35 |
| | Apr. | 65 | 32 | 33 |
| | Maio. | 66 | 38 | 28 |
| | Iun. | 78 | 52 | 26 |
| | Iul. | 83 | 55 | 28 |
| | Aug. | 79 | 51 | 28 |
| | Sept. | 74 | 48 | 26 |
| | Oct. | 65 | 28 | 37 |
| | Nou. | 46 | 16 | 30 |
| | Dec. | 48 | 11 | 37 |
| 1751. | Ian. | 38 | 22 | 16 |
| | Febr. | 41 | 8 | 33 |
| | Mart. | 62 | 27 | 35 |
| | Apr. | 59 | 32 | 27 |
| | Maio | 65 | 42 | 23 |
| | Iun. | 78 | 49 | 27 |
| | Iul. | 81 | 55 | 39 |
| | Aug. | 86 | 50 | 31 |
| | Sept. | 69 | 45 | 24 |
| | Oct. | 69 | 30 | 39 |
| | Nou. | 49 | 17 | 32 |
| | Dec. | 47 | 18 | 29 |

Vnde apparet, maximum per hos annos caloris gradum fuiſſe 86, qui incidit d. 26. Iulii 1751, in ſerenitate fere perfecta, flante tenui W. Haud vero multo

multo minor calor fuit anno 1750, nempe 83 graduum, qui obſeruatus eſt ſummus illius anni d. 24 Iulii, coelo ſubnubilo, et ſpirante NO, cum inſequentibus veſperi tonitribus, crebrisque ſulgurationibus. Triduo poſt, nempe Iulii 27, Goettingae maximus calor illius anni obſeruatus fuit, graduum autem 95½, dimidio tantum adhuc gradu a calore hominis ſani interno differentium. Maximum autem frigus erat 8 grad. quod ſenſimus mane 1751, Febr. 13, flante O tenuiſſimo, in ſerenitate perfecta. Manet igitur adhucdum annus ſuperior 1746 calidiſſimus omnium, graduum ſcilicet 94; frigidiſſimus autem 1745, graduum quippe 13 infra O.

§. 3. De auroris borealibus annotaui ſequentia:

1750, Febmarii 3, ab hora ſexta veſpertina fere ad mediam vſque noctem viſa hic fuit lux borea, primo inſigni rubedine, tum vero magna claritate conſpicua, flante tenui O, in ſerenitate aliquot dierum, et frigore ſatis intenſo, ad gradus 12 adhuc ſupra o. Eadem apparuit quoque Hannouerae, et Neapoli, vti ex nouis publicis intellexi.

Maii 1, aderat horis 8 et 9, p. m. lux borealis, lumine, et copioſis virgis, coruſcans in ſerenitate perfecta, ſpirante leni O.

Auguſti 26, hora 10 p. m. in ſerenitate iterum integra, flante leni W, conſpiciebatur lux borealis manifeſta.

Nouembris 9, hora 10 p. m. inter nubes paullo diuiſas, flante forti W, ſuſpicio mihi erat talis lucis.

Decembris 31, circa mediam noctem, inter nubes, flante tenui N, conſpiciebantur radii lucis borealis, aut fulgura, ex relatione aliorum.

1751. Maii 30, inter nubes paullo diuiſas conſpexi lucem borealem magnam, circa horam 11 p. m.

Septembris 3, poſt fortem pluuiam, in aliqua ſerenitate, hora 7½ p. m. aderat lux borealis manifeſta.

Septembris 19, hora 9 p. m. iterum viſa fuit lux borea, diſtincta virgis et lumine inſigni.

Nouembris 30, in ſerenitate fere integra, hora 10 p. m. dubia mihi videbatur talis lux, lucente Luna.

§. 4. Reliquae in vicinia noſtra obſeruatae aurorae boreales a *Clariſſ. Dom. Biſchoffio*, cuius tam induſtria, et attentio ad varia naturae phaenomena, omnem laudem merentur, quam etiam loci, in quo habitat, opportunitas ad haec ipſi fauet, prouti in *Obſeruat. Meteorolog. annorum* 1747, *ſequenti* §. 5. dictum eſt, huc redeunt.

1750, Februarii 3, hora 7 p. m. aurora borealis, totam plagam borealem occupans; plaga NO et NW egregie rubra, in plaga N vero vehementer albicans, ſub variis formis et coloribus ad mediam noctem vſque a me obſeruata, ſed tum nondum finita.

Idem Obſeruator ſedulus, poſtea etiam ſequentes has adhuc annotauit luces boreales. Et quidem 1750, Martii 4; Maii 1; Decembris 28, hora 5 p. m. ſub coelo ſereno, quam extantiorem vocat. Anno 1751 autem Februarii 11, hora 7 p. m. egregie rubram; Octobris 23 debilem.

§. 5. Lumen Zodiacale obſeruatum fuit Anno 1750, Martii 8, hora 6 p. m. eiusdem 26, 28, et 31, eadem circiter hora, coelo ſemper ſereno. Aprilis 2, et 24, in iisdem circumſtantiis. Anno 1751, Aprilis 20, hora 8 p. m.

§. 6. Declinationem acus magneticae, 6 pollices longae, et meridianae lineae nunc conſtanter appoſitae, his annis inueni fuiſſe 14° 30', Occidentem verſus; eandemque aliquoties iterum modo maiorem, modo minorem, aliquot minutis deprehendi poſt graues tempeſtates, et grandines.

§. 7. In Eclipſi Solis, quae contigit 1750. d. 8 Ianuarii, mihi tantum licuit obſeruare finem, hora 10 min. 52, temporis medii.

§. 8. Reliqua huc ſpectantia comprehendam ſequentibus.

*Primo*, 1750, Aprilis 11, mane circa horam 1, terrae motus hic exortus eſt, ſed momentaneus et leuis.

*Secundo*, tonitrua audita fuerunt Anno 1750, Aprilis 23, 26; Maii 4, 24, 29, et 30; Iunii 7, 12; Iulii 5, 17, 24, 28, 31; Auguſti 13, 14, 21, 27, 28; Septembris 2, 4, 14, 15; Anno 1751 autem Maii 1, 6; Iunii 27; Iulii 4, 15, 18, 21; Auguſti 15, 25, 28, Septembris 17; Octobris 7.

*Tertio*, Grandines ceciderunt Anno 1750, Aprilis 7, 8 et 9, tenues; Iunii 12. Anno 1751, Maii 17, Auguſti 25, quae horrida fuit, deiiciens copioſos globos, qui oui columbini magnitudinem habebant; denique Decembris 27.

OB-

# OBSERVATIONES METEOROLOGICAE, FACTAE TVBINGAE ANNO 1752.

## A GEORG. WOLFFG. KRAFFT.

§. 1.

Inſtrumentis rurſus in ſitu aptiſſimo ſeruatis, vti antea indicaui, menſtruae altitudines maximae et minimae barometricae ſunt ſequentes, quas cum differentiis ſuis hic appono, intelligendo pedis Londinenſis pollices duodecimales, eorundemque partes centeſimas.

| Menſis | max. | min. | diff. | Menſ. | max. | min. | diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ianuar. | 29. 05 | 27. 80 | 1. 25 | Iul. | 28. 82 | 28. 43 | 0. 39 |
| Febr. | 28. 86 | 28. 01 | 0. 85 | Aug. | 28. 93 | 28. 35 | 0. 58 |
| Mart. | 29. 13 | 27. 81 | 1. 32 | Sept. | 29. 03 | 28. 50 | 0. 53 |
| Apr. | 28. 92 | 28. 14 | 0. 78 | Oct. | 29. 23 | 28. 70 | 0. 53 |
| Maius | 28. 80 | 28. 23 | 0. 57 | Nou. | 29. 18 | 28. 40 | 0. 78 |
| Iun. | 28. 95 | 28. 32 | 0. 63 | Dec. | 29. 09 | 27. 80 | 1. 29 |

Ex quibus apparet, manere adhucdum maximam altitudinum hic loci obſeruatarum 29, 36, quae anno 1746 obſeruata fuit; et minimam earundem 27. 64, viſam anno 1749; eandemque differentiam maximam 1. 72; adeoque mediam Barometri altitudinem 28. 50, nulla habita ratione inſtrumenti ſupra Nicri fluuii libellam eleuati, quae proxime 60 pedes Londinenſes explet, adeoque $\frac{9}{100}$ pollicis Lond. duodecimalis efficit, ſingulis

gulis altitudinibus Barometri addendas, ſi hae deſiderentur a ripa dicti fluuii.

§. 2. Obſeruationes Therometri *Fahrenheitiani*, in aëre libero, ſed vmbroſo, ſemper conſtituti, ſequentem praebent tabellam, quae cuiusque menſis oſtendit gradum caloris maximum, et minimum, cum differentia vtriusque.

| Menſis | max. | min. | diff. | Menſis | max. | min. | diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ian. | - 47 | - 14 | - 33. | Iul. | - 72 | - 57 | - 15. |
| Febr. | - 44 | - 28 | - 16. | Aug. | - 72 | - 53 | - 19. |
| Mart. | - 53 | - 26 | - 27. | Sept. | - 78 | - 47 | - 31. |
| Apr. | - 60 | - 30 | - 30. | Oct. | - 61 | - 30 | - 31. |
| Mai | - 67 | - 46 | - 21. | Nou. | - 50 | - 24 | - 26. |
| Iun. | - 81 | - 56 | - 25. | Dec. | - 52 | - 13 | - 39. |

Vnde apparet maximum per hunc annum caloris gradum fuiſſe 81, qui incidit die 30 Iunii, flante forti Auſtro, poſt magnam varietatem ventorum, turbines etiam, coelo paucis nubeculis occupato, et ſubſequentibus veſperi leuibus fulgurationibus. Maximum vero huius anni frigus eſt 13 graduum, quod ſenſimus mane Decembris die 4, flante Zephyro tenui in ſerenitate perfecta. Medius igitur totius huius anni caloris gradus eſt 47, adeoque vno gradu infra temperiem moderatam, quae ſtatuitur 48 grad.

§. 3. Auroras boreales hoc anno ſequentes obſeruaui.

Februarii 26, et 29, inter nubes tenues ſuſpicio mihi orta eſt de tali luce, incerta tamen.

Mar-

Martii 36, inter nubes diuiſas, poſt grandinem et vehementem pluuiam, conſpicua erat aurora borealis manifeſta, copioſis ſtriis et radiis.

Maii 13, aderat lux borealis iterum manifeſta, in ſerenitate fere integra, inter ſplendidas fixas boreales conſpicua.

Iulii 16, inter fiſſuras nubium lux borealis mihi viſa fuit, albis, et mutatis ſubinde, virgis, manifeſta.

Iulii 21, in itinere *Stuttgardiae* verſatus, vidi auroram borealem multis, latis, albisque ſtriis eminentem, circa horam 9 p. m.

Iulii 31, lux borealis magna, inter nubes tenues.

Auguſti 1 et 2, in aliqua ſerenitate, poſt pluuias fortes, eandem debiliorem obſeruaui.

Auguſti 23, ſuſpicio mihi talis lucis enata eſt, ex aliquibus phaenomenis.

Nouembris 17, flante forti Euro, aderant veſtigia lucis borealis.

Decembris 14, flante fortiſſimo Zephyro per aliquot dies, hora 6 veſpert. manifeſta aderat lux borealis inter nubes continuas varia et inconſtanti albedine ſe prodens.

 Qui-

Quibus accedunt ſequentes adhuc, ab Amicis mecum communicatae, in vicinia noſtra; nempe:

Ianuarii 18, cum lumine Zodiacali manifeſta aurora borealis, coelo ſereno, hora 6 p. m. obſeruata a *Plurim. Reuerendo Dom. Biſchoffio*, in ſuperioribus annis iam laudato.

Maii 6, coelo iterum ſereno.

Maii 17, inſignis, aurora borealis viſa eſt *Stuttgardiae*, a *Clariſſ. Dom. Profeſſore Volzio*, hora 10 p. m.

Auguſti 4, ab vtroque Amico mihi indicata.

Octobris 13, magna lux borealis ſpectata eſt *Stuttgardiae*, teſte *Clariſſ. Volzio*.

§. 4. Declinationum acus magneticae, 6 poll. longae, et lineae meridianae conſtanter appoſitae, maximam inueni hoc anno, occidentem verſus, 14° 45′, minimam autem 14° 30′, vnde iterum magna euidens inconſtantia, quae hoc quoque anno poſt grauiores tempeſtates aliquoties, ſe ſpectandam praebuit, media aſſumenda erit 14° 37′.

§. 5. Vtilitates et vſus harum obſeruationum meteorologicarum comprehendere non poſſumus, niſi ex longa annorum ſerie; quod illis naturae indagatoribus percenſendum trado, qui tales quotidianas et oneroſas

collectiones vilipendere videntur. Ex octennio enim, in quo operam hanc in me ſuſcepi his loci, duos ad minimum nactus ſum fructus, quibus etiam non ſine iucunditate fruor, atque alios quoque lubentiſſime in partes huius laetitiae trahere cupio. *Primo* enim ſcio per meam experientiam, quam poſteris aliquantum emendandam relicturus ero, mediam Barometri altitudinem eſſe *Tubingae* 28. 50; (§. 1). Sciant autem Phyſici ex hac eruere loci eleuationem ſupra oceanum proximum. Vti ergo ex ſtellis diſco loci mei ſitum *Geographicum*; ita ex Barometri indefeſſa inſpectione acquiro tandem eiusdem ſitum *Phyſicum*; qui, quousque in poſterum deducat, ad telluris figuram particularem, ad atmoſphaerae naturam, ad plures alias veritates, cognoſcendas, apertum quidem iam non eſt, ſed nec omnino occultum. Abſit igitur, vt ſpem etiam veri alicuius eruendi deſeramus.

§. 6. *Secundo*, ex eodem hoc octennio, propria experientia edoctus, ſcio etiam, quem a quolibet menſe totius anni calorem mihi tam, quam plantis educandis, aliisque rebus oeconomicis, promittere poſſim. Ita in hoc octennio expertus ſum, calorem medium, ex Thermometro *Fahrenheitiano* aeſtimatum, eſſe omnium

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ianuariorum | - - 28. Grad. | Iuliorum | - - - 68. Grad. |
| Februariorum | - 31. | Auguſtorum | - - 65. |
| Martiorum | - - 36. | Septembrium | - 61. |
| Aprilium | - - - 48. | Octobrium | - - 47. |
| Maiorum | - - 58. | Nouembrium | - 35. |
| Iuniorum | - - - 66. | Decembrium | - - 33. |

adeoque menſem Ianuarium eſſe ordinarie omnium frigidiſſimum, Iulium vero calidiſſimum; ex quibus medius calor totius anni *Tubingae* exiſtit 48 graduum, quem eundem *Petropoli* diuturna obſeruatione deprehendi eſſe 43 graduum; vnde differentia Climatum, caloris reſpectu, quae in Geographia Phyſica non exigui momenti eſt, cognoſcitur. Dicant mihi ſimilia, qui in aliis locis degunt, magnopere me delectaturi; faciant idem, qui ſpernunt hoc hocuſque, multum ſeſe emendaturi; immo imitentur haec, quicunque ſapiunt, magno ſuo emolumento in praeſenti, et maiori adhuc in poſterum, expectando.

§. 7. Reliqua his adhuc accenſenda ſequentibus complectar. *Primo*, tonitrua audita fuerunt Maii 2, 18. Iunii 6, 7, 8, 11, 17, 30. Iulii 8, 10, 11, 13, 14, 25, 26. Auguſti 15, 27. Septembris 6, 14.

*Secundo*, grando cecidit

Ma-

Martii 16 ſub gradu 40. Therm.
— 26 — — 42.
Aprilis 5 — — 41.
Maii 11 — — 49.
Iunii 6 — — 70.

Iunii 7, ſub gradu 65 Therm. nucis auellanae magnitudine, cum graui tempeſtate, vna die poſt ☍ ♄ ♃.
Iulii 25, in magno calore aëris, cum tempeſtate graui.
Decembr. 15 — — 46.

aliquot earum cum procella vehementi, plures autem nullo, aut remiſſiori, vento.

*Tertio*, Halonem Lunarem magnum et diſtinctum vidimus Aprilis die 21, hora 8½ p. m. in ſerenitate, a centro Lunae vltra cor Leonis extenſum, ex altera parte Procyone exacte terminatum, et per trihorium durantem, quem integra fere ſerenitas aliquot dierum inſequebatur.

*Quarto*, primas hirundines copioſas vidi Aprilis 12, indicante Thermometro gradus 44. Ranae primum coaxare ceperunt Maii 8, oſtendente Thermometro 53 gradus.

*Quinto*, Februarii 26, et 27, horarum duodecim ſpatio, Barometrum decidit ex 28. 60 ad 28, 36, ſine vllo vento ſenſibili. Martii autem diebus 24, 25,

et 26, ex 28. 61 depreſſius factum eſt ad 27. 31, vento Zephyro per integrum quatriduum ſumme furente, cui grando ſucceſſit, et aurora borealis.

*Sexto*, Nebulas inſignes experti ſumus Ianuarii 18. 23 et 24, continuam, 27, 30, 31. Febr. 1, 4, 7, 9, 10, 11, 24, 28. Martii 6, 15. Iulii 8, 11. Aug. 19, 20, 21, 30, 31. Sept. 1, 4, 8, 16, 18, 27. Octobr. 5, 9, 10, 11, 12, 15, 20, 22, 26, 27. Nouembris per 21, 22 et 23. continuam, per 26, 27, 28 et 29 continuam. Decembris. 20.

---

---

ASTRO-

ASTRONOMICA.

INVE-

# SOLVTIO NOVI CVIVSDAM PROBLEMATIS ASTRONOMICI IN VSVM PRAECIPVE NAVTICVM PROPOSITI IN DISSERTATIONE DE PROGRESSV ARTIS NAVTICAE IN DETERMINANDA MARIS ET LONGITVDINE ET LATITVDINE.

Auctore

*A. N. GRISCHOW.*

Plurimum cum laborauerint in rebus nauticis intelligentes ad inuenienda organa, quorum adminiculo obſeruationes aſtronomicae ſuper mari ad inueſtigandam longitudinem aeque ac latitudinem ſpectantes accurate tuteque inſtitui poſſent, haud minus dignum atque vtile mihi viſum eſt ſtudium praeſtantiores excogitandi methodos tempus in alto mari obſeruandi accuratiſſime. Neminem quidem latet, varios iam eſſe nautis inueſtigandi temporis modos, quantis autem quotque errorum fontibus vulgares vſuque receptae ſcaturiant methodi, nemo equidem, niſi hiſce in rebus probe verſatus experientiaque edoctus, perſpectum habet.

Praecipui autem errores, quibus methodi tempus ſuper mari determinandi ſcatent, ex vitioſe laboratis inſtrumentis nauticis, circa primum praeſertim diuiſionis punctum, et ex fallaci Horizonte, originem ducunt. Tempus enim ex altitu-

nibus Solis vel Stellarum reſpondentibus, ſiue aequalibus, determinare, primum in aperto mari meo quidem iudicio eſt difficillimum, ſaepiſſimeque propter coeli varietatem caſſus labor; deinde vero negotium complurium ſane horarum, quarum ſpatio nauis ad ancoras conſiſtat, neceſſe eſt, ne temporis computatio nimis implicata vagaque reddatur. Sin autem, vt nonnullis proponere conſultum viſum eſt, Meridiei determinatio ex altitudinibus Solis aequalibus paulo ante et poſt culminationem Solis obſeruatis petenda fuerit, Meridiei hac ratione concluſo minime eſt fidendum.

Hiſce rationum momentis inductus in methodum obſeruandi temporis incidi, cuius beneficio, cum differentia tantum altitudinum binarum ſtellarum, neutiquam vero altitudines earum abſolutae obſeruatae requirantur, errores inſtrumenti et Horizontis maiori ex parte vitare, et obſeruationes ad tempus determinandum ſpectantes aliquot tantum minut. prim. ſpatio peragere licet; ita quidem vt nullam conturbationem obſeruationibus afferre poſſit ſiue refractionum inconſtantia atque diuerſitas, ſiue Horizontis ſenſibilis inclinatio. Modus hic eo praeterea gaudet commodo, vt errores in ipſa altitudinum differentia admiſſi, ſiue diuiſioni inſtrumenti, ſiue obſeruatori adſcribendi, nullam notabilem in tempore exinde ſupputando producere valeant a vero aberrationem.

Accedit ad haec, vt nauclerus calculis aſtronomicis imbutus, vſuque inſtrumentorum et methodi huiusce nouae exercitatus, facili negotio, poſito breui calculo, ita

celi-

eligere ſciat ſtellas, atque ita arripere intelligat temporis momenta, vt intra complura min. prim. dubia eleuatio Poli nullum aut exiguum valde errorem afferre poſſit tempori ex obſeruationibus et eleuatione Poli data ſimul colligendo.

Methodi autem noſtrae vſus atque conditiones, vt penitius atque clarius ipſisque nautis doctrina calculi aliquatenus inſtructis intelligerentur, ſequens ſubiunxi exemplum ipſius calculi breuiſſime inſtituendi rationem exhibens.

## Problema.

*Obſeruatis binarum fixarum, quarum altera Ortum verſus, altera ad Occaſum a Meridiano remota, altitudinibus fere aequalibus: datisque tempore inter obſeruationes praeterlapſo, differentia altitudinum fixarum obſeruatarum, vna cum earundem Declinationibus ac differentia Aſcenſionum rectarum, nec non eleuatione Poli; determinare tempus a culminatione et altitudines fixarum abſolutas.*

## Solutio exemplo illuſtrata.

Sit HZPR. Meridianus, in quo Z. Zenith, et P. Polus Aequatoris. Obſeruata ſit ſub eleuatione Poli 50° 0′ et longitudine 180 circiter grad. altitudo Arcturi a Meridiano Ortum verſus in ſ verſantis d. 30. Mart. ſt. n. An. 1750. $9^h.55'.0''$ temp. Horol. $=27°.27'$, eodemque die $9^h.56'.30''$ temp. Horol. altitudo ſtellae Aldebaran ſiue Palilicii a Meridiano Occidentem verſus in S remotae $=22°.27'$, ita vt altitudinum differentia Tab XII. Fig. A.

 obſer-

obſeruata ſit $=5°.0'$, quae refractionum differentia correcta mutatur in veram $=5°.0'.30''$. Ex Catalogo fixarum deſumitur pro tempore ſupra notato Declinatio Arcturi $=20°.30'$ bor. eiusdemque Aſcenſio recta $=211°.4'$. Declinatio itidem Palilicii pro eodem tempore $=15°.59'$. bor. eiusdemque Aſcenſio recta $=65°.24'$. Differentia itaque Aſcenſionum rectarum Arcturi et Aldebaran erit $=145°.40'$, et tempus inter obſeruationes praeterlapſum in partes Aequatoris conuerſum $=22'.33''$, hinc angulus ad Polum $SPs=146°.2'.33''$.

Ponatur iam angulus horarius $ZPs=\alpha$; ang. horar. $ZPS=\beta$; altitudo Aequatoris $ZP=c$; complementum Declinationis Arcturi $sP=b$; complementum Declinationis Palilicii $SP=a$; diſtantia Arcturi a Zenith $Zs=y$ et diſtantia Aldebaran a Zenith $ZS=y+\delta$, ita vt $\delta$ differentiam altitudinum fixarum veram, ſiue obſeruatam, et refractionum differentia correctam denotet: Quocirca habebimus poſito radio $=1$,

$$\cos\alpha=\frac{\cos y-\cos c.\cos b}{\sin c.\sin b}\quad\text{et}$$

$$\cos\beta=\frac{\cos(y+\delta)-\cos c\cos a}{\sin c.\sin a}$$

Solutio itaque Problematis eo redit, vt determinetur valor ipſius $y$ ita comparatus, vt $\alpha+\beta=$ ang. ad Polum $SPs$. Hoc vero vt commodiſſime fiat, ponamus altitudinem veram Arcturi, dum infra accuratiſſime definiatur, $=27°.27'$, quo facto, ad formulas ſupra traditas reſoluendas ſequentes iam habemus literarum valores:

lores: $y = 62°\,33'$; $\delta = 5°.0'.30''$; $y+\delta = 67°.33'30''$; $a = 74°.1'$; $b = 69°.30'$; $c = 40°.0'$ et $\alpha + \beta = 146°.2'.33''$, adeoque

| | |
|---|---|
| $l.$coſ. $c = 9.8842540$ | $9.8842540 = l.$coſ. $c$ |
| $l.$coſ. $b = 9.5443253$ | $9.4398973 = l.$coſ. $a$ |
| $l.$coſ. $c$. coſ. $b = 9.4285793$ | $9.3241513 = l.$coſ. $c$.coſ. $a$ |
| coſ. $c$.coſ. $b = 0.26827443$ | $0.21093629 =$ coſ. $c$ coſ. $a$ |
| coſ. $y = 0.46097432$ | $0.38174262 =$ coſ. $(y+\delta)$ |
| coſ. $y -$ coſ $c$.coſ. $b = 0.19269989$ | $0.17080633 =$ coſ. $(y+\delta) -$ coſ. $c$ coſ. $a$ |
| $l$(coſ. $y -$ coſ. $c$. coſ. $b$) $= 9.2848815$ | $9.2325040 = l$(coſ. $(y+\delta) -$ coſ. $c$. coſ. $a$) |
| $l.$ ſin. $c = 9.8080675$ | $9.8080675 = l.$ ſin. $c$ |
| $l.$ ſin. $b = 9.9715876$ | $9.9828778 = l.$ ſin. $a$ |
| $l.$ ſin $c$. ſin. $b = 9.7796551$ | $9.7909453 = l.$ ſin. $c$. ſin. $a$ |
| $l. \frac{\text{coſ.}y - \text{coſ.}c.\text{coſ.}b}{\text{ſin.}c.\text{ſin.}b} = l.\text{coſ.}\,\alpha = 9.5052264$ | $9.4415587 = l. \frac{\text{coſ.}(y+\delta) - \text{coſ.}c.\text{coſ.}a}{\text{ſin.}c.\text{ſin.}a} = l.\text{coſ.}\,\beta$ |
| $\alpha = 71°.20'.1''$ | $73°.57'.13''\tfrac{1}{2} = \beta$ |

Summa igitur angulorum $\alpha$ et $\beta$ ex noſtro calculo in hypotheſi $y = 62°.33'$ deducta aequatur $145°.17'.14''\tfrac{1}{2}$. Cum vero $\alpha + \beta$ eſſe debet $= 146°.2'.33''$, facile intelligitur, valorem ipſius $y$ ſupra aſſumtum eo modo eſſe augendum, vt ipſius incrementum augere valeat ſummam angulorum $\alpha$ et $\beta$ quantitate data $= 45'.18''\tfrac{1}{2} = 2718''.5$, manente valore literarum $a$, $b$ et $c$ ſemper eodem.

Ad hocce negotium facillimo modo peragendum ex aequationibus ſupra exhibitis analytice relationem incrementi ipſius $y$ ad incrementum angulorum $\alpha$ et $\beta$ methodo ſequenti eruere conabor:

Eſt enim $\cos.\alpha = \frac{\cos.y - \cos.c.\cos.b}{\sin.c.\sin.b}$, hinc differentiando

$$-d\alpha \sin.\alpha = -\frac{dy.\sin.y}{\sin.c.\sin.b},$$ ſiue

$$d\alpha = \frac{dy.\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b}.$$ Simili modo prodibit

$$d\beta = \frac{dy \sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.a},$$ adeoque

$$d\alpha + d\beta = \left(\frac{\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b} + \frac{\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.a}\right) dy,$$ ſiue

$$dy = \frac{d\alpha + d\beta}{\frac{\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b} + \frac{\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.a}}.$$

| | |
|---|---|
| ex praeced. $l.\sin.c.\sin.b = 9.7796551$ | $9.7909453 = l.\sin.c.\sin.a$. ex praeced. |
| $l.\sin.\alpha = 9.9765325$ | $9.9827409 = l.\sin.\beta$ |
| $l.\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b = 9.7561876$ | $9.7736862 = l.\sin\beta\sin.c.\sin.a$ |
| $l.\sin.y = 9.9481260$ | $9.9657982 = l.\sin.(y+\delta)$ |
| $l\frac{\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b} = 0.1919384$ | $0.1921120 = l.\frac{\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta\sin.c.\sin.a}$ |
| $\frac{\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b} = 1.55574465$ | |
| $\frac{\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.b} = 1.55636720$ | |
| $\frac{\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b} + \frac{\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.a} = 3.11211185$ | |
| $l.\left(\frac{\sin.y}{\sin.\alpha.\sin.c.\sin.b} + \frac{\sin.(y+\delta)}{\sin.\beta.\sin.c.\sin.a}\right) = 0.4930552$ | |
| $l.d\alpha + d\beta = l.2718''.5 = 3.4343293$ | |

$l.dy = 2.9412741$, adeoque $dy = 873''.5 = 14'.33''.5$.

Quan-

Quantitas igitur, qua diſtantia Arcturi vera a Zenith ſiue $y$ ſupra ſuppoſita $= 62°.33'$ eſt augenda, vt verus anguli ad Polum $SPs$ valor prodeat, vi praecedentis calculi eſt $= 14'.33''\frac{1}{2}$, ita vt diſtantia Arcturi vera a Zenith correcta, ſiue $y$ ſit accuratiſſime $= 62°.47'.33''\frac{1}{2}$, adeoque $y + \delta = 67°.48'.3''\frac{1}{2}$. Hice ſtabilitis, erit iam

| | |
|---|---|
| $\text{coſ.}\, y = 0.45721220$ | $0.37782500 = \text{coſ.}(y + \delta)$ |
| raeced. $\text{coſ.}\, c.\, \text{coſ}\, b = 0.26827443$ | $0.21093629 = \text{coſ.}\, c.\, \text{coſ.}\, a$ ex praeced. |
| $\text{coſ.}\, y - \text{coſ.}\, c.\, \text{coſ.}\, b = 0.18893777$ | $0.16688871 = \text{coſ.}(y + \delta) - \text{coſ.}\, c.\, \text{coſ.}\, a$ |
| $l.(\text{coſ.}\, y - \text{coſ.}\, c.\, \text{coſ.}\, b) = 9.2763186$ | $9.2224269 = l.(\text{coſ}(y + \delta) - \text{coſ.}\, c.\, \text{coſ.}\, a)$ |
| aeced. $l.\, \text{ſin.}\, c.\, \text{ſin.}\, b = 9.7796551$ | $9.7909453 = l.\, \text{ſin.}\, c.\, \text{ſin.}\, a$ ex praeced. |
| $l.\, \text{coſ.}\, \alpha = 9.4966635$ | $9.4314816 = l.\, \text{coſ.}\, \beta$ |
| $\alpha = 71°.42'.40''$ | $74°.19'.53'' = \beta$. |

Summa angulorum $\alpha$ et $\beta$ iam inuentorum angulo ad Polum $SPs$ praeciſe aequalis maximo eſt argumento ad diſtantiam veram Arcturi a Zenith recte determinatam. Propterea nullo iam fere negotio ſtellarum obſeruatarum altitudines abſolutas definire poſſumus. Arcturi enim altitudo abſoluta vera tempore obſeruationis erit $= 27°.12'.26''\frac{1}{2}$, hinc altitudo eius apparens ſupra Horizontem verum $= 27°.14'.20''\frac{1}{2}$, et error quadrantis, inclinatione Horizontis ſenſibilis implicatus atque coniunctus, ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendus $= 12'.40''$. Simili modo, admiſſa altitudinum differentia obſeruata, prodibit altitudo abſoluta vera Palilicii $= 22°.11'.56''\frac{1}{2}$,

eius-

eiusdemque altitudo apparens ſupra Horizontem verum $= 22^{\circ}.14'.20''\frac{1}{2}$.

Tempus itidem verum ex calculis antecedentibus modo ſequenti fluit: Angulus horarius Palilicii S P Z tempore ſecundae obſeruationis ſecundum calculum ſupra peractum aequatur $74^{\circ}.19'.53''$, ex quo in tempus verum pro ratione $360^{\circ}$. ad $23^{h}.56'.22''$ conuertendo colligitur tempus verum a culminatione Palilicii $= 4^{h}.56'.35''\frac{1}{2}$. Poſita autem Aſcenſione recta Palilicii vt ſupra $= 65^{a}.24'$, prodibit eiusdem tempus culminationis A. 1750. d. 30 Mart. ſt. n. ſub longitudine circiter 180. grad. $3^{h}.47'.7''\frac{3}{4}$. p. m. adeoque tempus ſecundae obſeruationis verum $8^{h}.43'.43''\frac{1}{4}$ p. m. Horologium itaque tunc $1^{h}.12'.46''\frac{3}{4}$ ultra tempus verum proceſſit.

Huiusce vero temporis accuratiſſime determinandi methodi praeſtantia vt latius pateat, non inutile fore judico, ſi paucis inquiram in relationem, quae tempori modo ſupra expoſito ſupputando intercedit cum eleuatione Poli, quae ad problematis ſolutionem neceſſario requiritur. Quamuis enim errores quadrantis ex obſeruandis altitudinibus ſiderum abſolutis oriundi huiusce methodi adminiculo facile declinari poſſint, ſimilis tamen errorum fons in obſeruanda Poli eleuatione reſidere videtur, cuius exhauriendi gratia indagare primum conuenit errorem in angulum horarium, ex eleuatione Poli, declinatione atque altitudine ſideris definiendum, a dato errore eleuationis Poli profectum; deinde autem indicare ſitum ſideris cuiuscunque propoſiti reſpectu

reſpectu

ſpectu Meridiani eo tempore, quo erronea Poli eleuatio minime immutare valet angulum horarium, methodo antedicta ſupputandum.

Ponatur itaque, vti ſupra, altitudo Aequatoris $ZP = c$, diſtantia Sideris a Polo Aequatoris $sP = b$, diſtantia eiusdem a Zenith $Zs = y$ et angulus horarius $ZPs = \alpha$, eritque

$$\text{coſ.}\, \alpha = \frac{\text{coſ.}\, y - \text{coſ.}\, c\, \text{coſ.}\, b}{\text{ſin.}\, c.\, \text{ſin.}\, b}$$

Poſitio igitur quod $b$ et $y$ ſint quantitates conſtantes, $\alpha$ et $c$ autem variabiles, emerget differentiando formulam iam exhibitam, iſta aequatio:

$$-\text{ſin.}\, \alpha\, d\alpha = \frac{\text{coſ.}\, b\, \text{ſin.}\, b\, \overline{\text{ſin.}\, c}^2\, dc - (\text{coſ.}\, y - \text{coſ.}\, c\, \text{coſ.}\, b)\, \text{ſin.}\, b\, \text{coſ.}\, c\, dc}{\overline{\text{ſin.}\, c\, \text{ſin.}\, b}^2}$$

hinc $d\alpha = \frac{dc}{\text{ſin.}\, \alpha} \left( \frac{\text{coſ.}\, y - \text{coſ.}\, c.\, \text{coſ.}\, b}{\text{ſin.}\, b\, \text{ſin.}\, c\, \text{tang.}\, c} - \text{cot.}\, b \right)$ ſiue

$$d\alpha = \frac{dc}{\text{ſin.}\, \alpha} \left( \frac{\text{coſ.}\, y}{\text{ſin.}\, b\, \text{ſin.}\, c\, \text{tang.}\, c} - \frac{\text{cot.}\, b}{\text{tang.}\, c^2} - \text{cot.}\, b \right)$$

Cum vero $\text{coſ}\, y$ ſit $= \text{coſ.}\, \alpha\, \text{ſin.}\, c\, \text{ſin.}\, b + \text{coſ.}\, c\, \text{coſ.}\, b$, erit variatio minima anguli horarii, ſiue

$$d\alpha = \frac{dc}{\text{ſin.}\, \alpha} \left( \frac{\text{coſ.}\, \alpha}{\text{tang.}\, c} + \frac{\text{cot.}\, b}{\overline{\text{tang.}\, c}^2} - \frac{\text{cot.}\, b}{\overline{\text{tang.}\, c}^2} - \text{cot.}\, b \right) \text{ adeoque}$$

$$d\alpha = \frac{dc}{\text{ſin.}\, \alpha} (\text{coſ.}\, \alpha\, \text{cotang.}\, c - \text{cotang.}\, b)$$

Si ſtella fuerit in Aequatore, erit $d\alpha = dc\, \text{cotang.}\, \alpha.\, \text{cotang.}\, c$. Inde conficitur, errorem in angulo horario hoc in caſu ſemper cotangenti anguli horarii fore proportionalem.

Huius formulae beneficio errorem in angulo horario ex erronea Poli eleuatione ortum ad quemuis angulum horarium datum, et pro quauis Declinatione Sideris ſub data eleuatione Poli aſſignare atque definire licet. Si ponatur ex. gr. in obſeruatione Arcturi ſupra relata error in eleuatione Poli $= 15'$, habebimus $dc = 15' = 900''$; $c = 40°.0'$; $b = 69°.30'$ et $\alpha = 71°.42'.40''$.

| | |
|---|---|
| hinc $l.$ coſ. $\alpha =$ | 9.4966645 |
| $l.$cotang. $c =$ | 10.0761865 |
| $l.$coſ. $\alpha$. cotang. $c =$ | 9.5728510 |
| coſ. $\alpha$.cotang. $c =$ | 0.3739823 |
| cot. $b =$ | 0.3738848 |
| coſ. $\alpha$. cotang. $c$ — cot. $b =$ | 0.0000975 |
| $l.$ (coſ. $\alpha$. cotang. $c$ — cot. $b$) $=$ | 5.9890046 |
| $l.\, dc = l.\, 900'' =$ | 2.9542425 |
| $l.\, dc$ (coſ. $\alpha$. cotang. $c$ — cot. $b$) $=$ | 8.9432471 |
| $l.$ ſin. $\alpha =$ | 9.9774887 |
| $l.\, d\alpha =$ | 8.9657584 adeoque |
| $d\alpha =$ | 0'',1 |

Patet igitur noſtro in exemplo errorem 15. min. prim. in eleuatione Poli nihil immutare angulum horarium Arcturi. Conſimili calculo inuenies errorem in angulo horario Palilicii errori 15′ in eleuatione Poli reſpondentem $= 33''$ ſiue $= 2''\frac{1}{5}$ temp. Ex quo abunde

de intelligitur tempus methodo noſtra accuratiſſime determinari poſſe, non obſtante errore in eleuatione Poli ſatis magno; modo vt Obſeruator ea arripiat temporis momenta, quibus ſtellae obſeruandae ita reſpectu Meridiani ſitae ſunt, vt erronea Poli eleuatio minime mutare valeat angulum horarium. Ad poſitionem hanc definiendam ponatur

$$d\alpha = \frac{dc}{\text{ſin.}\,\alpha}(\text{coſ.}\,\alpha\,\text{cotang.}\,c - \text{cotang.}\,b) = 0,$$ eritque hoc in caſu coſ. $\alpha$. cotang. $c$ = cotang. $b$, hinc

$$\text{coſin.}\,\alpha = \frac{\text{cotang.}\,b}{\text{cotang.}\,c}$$

Data igitur eleuatione Poli prope vera atque Declinatione ſtellae, nullo fere negotio definitur angulus horarius cuius determinatio neutiquam ab accurata eleuationis Poli cognitione pendet. Circa id itaque tempus capiendae ſunt ſucceſſiue altitudines fixarum, vt temporis determinatio ex altitudinum binarum fixarum differentia eruenda ab errore in eleuatione Poli admiſſo ſit tutiſſima, ſimulque reliquis errorum fontibus, ſiue inſtrumento, ſiue Obſeruatori aſſignandis, minime obnoxia.

Cum vero altitudo Sideris alicuius facilior ſit obſeruatu, quam angulus eiusdem horarius, ſatius erit poſitionem Sideris, in qua error in eleuatione Poli minimi eſt momenti ad tempus obſeruandum, per eiusdem

 alti-

altitudinem, eleuationi Poli et Declinationi Sideris reſpondentem definire.

Quia enim ſin. altitud. ſiue coſ. $y = \text{coſ.}\,\alpha.\ \text{ſin.}\,c.\ \text{ſin.}\,b + \text{coſ.}\,c.\,\text{coſ.}\,b$, erit ſubſtituendo valorem ſupra inuentum $\text{coſ.}\ \alpha = \frac{\text{cot.}\,b}{\text{cot.}\,c}$,

$$\text{coſ.}\,y = \frac{\text{cot.}\,b.\,\text{ſin.}\,c.\,\text{ſin.}\,b}{\text{cot.}\,c} + \text{coſ.}\,c\ \text{coſ.}\,b,\ \text{hinc}$$

$$\text{coſ.}\,y = \frac{\text{coſ.}\,b.\,\overline{\text{ſin.}\,c}^2 + \text{coſ.}\,b.\,\overline{\text{coſ.}\,c}^2}{\text{coſ.}\,c}$$

$$\text{coſ.}\,y = \frac{\text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,c}\left(\overline{\text{ſin.}\,c}^2 + \overline{\text{coſ.}\,c}^2\right).\ \text{ſiue}$$

$$\text{coſ.}\,y = \frac{\text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,c}$$

Definita iam altitudine Sideris cuiuscunque, in qua ſub data eleuatione Poli tempus methodo noſtra obſeruare licet, nulla amplius relinquitur difficultas apud Obſeruatorem congruens aptumque ad maximam obtinendam accurationem aucupandi temporis momentum.

Reſtat itaque, vt deprehenſa ſtella ex. gr. Ortum verſus a Meridiano in debita altitudine verſante, Obſeruator facili negotio inuenire valeat ſtellam alteram in altitudine debita reſpondenti Occaſum verſus ſitam. Ad negotium hocce expediendum ponamus ſtellas obſeruandas pari quam proxime gaudere Declinatione; quo poſito, ſi Aſcenſionum rectarum differentia inuenienda dicatur $z$, erit

$$\text{coſin.}\,z = \frac{\overline{\text{cot.}\,b}^2}{\overline{\text{cot.}\,c}^2} - \left(1 - \frac{\overline{\text{cot.}\,b}^2}{\overline{\text{cot.}\,c}^2}\right)\ \text{ſiue}$$

$$\text{coſin.}\,z = 2.\,\frac{\overline{\text{cotang.}\,b}^2}{\overline{\text{cotang.}\,c}^2} - 1$$

Cogni-

Cognita itaque Aſcenſione recta ſtellae ex. gr. Ortum verſus verſantis, huius formulae ope facillime aſſignari poterit ſtella altera ad obſeruandum tempus prae aliis magis maximeue idonea.

Sicuti autem momenta illa temporis ad obſeruandas ſtellarum altitudines aptiſſima ex angulo horario vel ex altitudine ſtellarum definire docuimus, ita haud difficilius ex Azimutho ea cognoſcere poſſumus, ſiquidem ſtellae omnes in verticali primario et in altitudine circiter aequali verſantes ad tempus methodo hac determinandum maxime ſint idoneae.

Cum enim in caſu de quo agitur $\text{coſ.}\,\alpha = \frac{\text{cot.}\,b}{\text{cot.}\,c}$, et $\text{coſ.}\,y = \frac{\text{coſ.}\,b}{\text{coſ.}\,c}$, erit ſin. Azimuthi $= \frac{\text{ſin.}\,b.\sqrt{\left(1 - \frac{\overline{\text{cot.}\,b}^2}{\text{cot.}\,c^2}\right)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\overline{\text{coſ.}\,b}^2}{\text{coſ.}\,c^2}\right)}} =$

$$\frac{\text{ſin.}\,c\sqrt{(\overline{\text{ſin.}\,b.\text{cot.}\,c}^2 - \overline{\text{coſ.}\,b}^2)}}{\sqrt{(\overline{\text{coſ.}\,c}^2 - \overline{\text{coſ.}\,b}^2)}} = \frac{\sqrt{(\overline{\text{ſin}\,b.\,\text{coſ.}\,c}^2 - \overline{\text{coſ.}\,b.\text{ſin.}\,c}^2)}}{\sqrt{(\overline{\text{coſ.}\,c}^2 - \overline{\text{coſ.}\,b}^2)}} = 1.$$

Hinc igitur patet, erroneam Poli eleuationem nullum afferre errorem tempori methodo hac inueniendo iis ipſis momentis, quibus ſtellae obſeruandae per circulum verticalem primarium tranſeunt. Si quando autem ſtellae extra primarium verticalem obſeruatae fuerint, ope aequationis ſupra exhibitae $d\alpha = \frac{dc}{\text{ſin.}\,\alpha}(\text{coſ.}\,\alpha.\text{cotang.}\,c - \text{cotang.}\,b)$ facillime, vt iam oſtendimus,

dimus, definitur error in angulis horariis, ſiue in tempore, qui ex errore naſcitur eleuationi Poli adſcribendo.

Haec vero ſolutio pro iis tantum valet ſtellis, quorum Declinatio eleuationem Poli non exſuperat. Si enim Declinatio ſtellae fuerit maior eleuatione Poli, ſtella per verticalem primarium tranſit nunquam, ita vt pro eiusmodi ſtellis error in angulo ad Polum, ſiue $d\alpha$ ſit $= -\frac{dc}{\text{ſin.}\alpha}(\text{coſ.}\alpha.\text{cotang.}c - \text{cotang.}b) = \frac{dc}{\text{ſin.}\alpha}(\text{cotang }b - \text{coſ.}\alpha.\text{cotang.}c)$, hinc in caſu quo erronea Poli eleuatio minime mutare valet angulum ad Polum,

$$dd\alpha = \frac{dc}{\overline{\text{ſin.}\alpha}^2}(\text{cotang.}\,c - \text{coſ.}\,\alpha\ \text{cotang.}\,b)\,d\alpha = 0, \text{ adeoque}$$

$\text{coſin.}\,\alpha = \frac{\text{cotang.}\,c}{\text{cotang}\,b}$, $\text{coſ.}\,y = \frac{\text{coſ.}c}{\text{coſ.}b}$, et $d\alpha$ ſiue incrementum vel decrementum anguli ad Polum, vbi eſt minimum, $= dc.\sqrt{(\overline{\text{cotang.}b}^2 - \overline{\text{cotang.}c}^2)}$. Ex quo haud dubie intelligitur huiusce generis ſtellas ad tempus methodo noſtra determinandum minus eſſe idoneas.

---

ERRO-

# ERRORVM TABVLARVM LVNARIVM EX ECLIPSIBVS SOLIS, PRAECIPVE IIS, QVAE ANNO 1748. d. 25. IVLII ET ANNO 1750. d. 8. IANVARII ST. N. DILIGENTISSIME SVNT OBSERVATAE, DEFINIENDORVM DISQVISITIO.

Auctore

*A. N. GRISCHOW.*

Cum Eclipſes Luminarium Phaenomena ſint inter coeleſtia adeo conſpicua, vt Hominibus rerum coeleſtium imperitis antiquitus admirationem mouerint, plerique Spectatores ſola curioſitate adducti ad iſta Phaenomena ſpectanda veniunt; Aſtronomi contra ab incunabulis Aſtronomiae, propter vſum eximium plane atque ſingularem ex accurata Eclipſium obſeruatione percipiendum ad Phaenomena iſta ſumma diligentia contemplanda ſe applicarunt, imo ad ea rite obſeruanda in longinquas Regiones itinera nonnunquam ſuſceperunt. Utilitas vero praecipua, quae ex Eclipſium obſeruationibus hauriri poteſt, ad Theoriam Satellitis Telluris noſtrae condendam, corrigendam atque perficiendam, et ad Longitudines terreſtres determinandas redundat. Quanto enim conatu Aſtronomi et Geometrae ad Theoriam Lunae perficiendam incubuerint, quantumque fructum abſoluta Satellitis noſtri Theoria Nautis in pelago ſine duce ſaepiſſime oberrantibus, adeoque toti huma-

humano generi allatura ſit, quis neſcit? Neque ignoti ſunt progreſſus illi inſignes, quos indefeſſo labore fecere rerum coeleſtium Speculatores in enucleanda Theoria Lunari ad tantum faſtigium noſtris temporibus euecta, vt perfectioni eius nihil deeſſe videatur, praeter magnum accuratiſſimarum obſeruationum numerum in diuerſis Lunae poſitionibus ratione Apogaei, Nodorum et Solis habitarum et ab Aſtronomis petendarum. Quam ob rem Aſtronomi debito inſtrumentorum apparatu muniti nullam praetermittere ſolent eiusmodi obſeruationum inſtituendarum occaſionem, ea etiam adhibentes obſeruata, quae ex Eclipſibus Luminarium colliguntur, quia in Syzigiis bona aequationum Lunarium parte euaneſcente, reliquae eo facilius expediuntur. Eclipſium Luminarium igitur obſeruationes ſcite inſtitutae praecipue Tabularum erroribus Parallaxeos, Longitudinis et Latitudinis Lunae detegendis inſeruiunt: Eclipſes tamen Lunares ad iſtos errores determinandos minus quam Solis Deliquia eſſe accommodatas Aſtronomi iam dudum expertum perſpectumque habent; difficultas enim initium et finem Eclipſeos Lunaris, vel appulſus Vmbrae ad maculas Lunaris corporis aſſueta Aſtronomorum accuratione obſeruandi tanta eſt, vt momenta haec vel pro diuerſa Teleſcopiorum virtute diſcrepent; ſiquidem initium Eclipſeos Lunaris per maiora Conſpicilla aſtronomica tardius, finis contra citius quam per minora Teleſcopia obſeruari ſolent: vt caeteras taceam cauſas et obſeruationum circumſtantias, quibus effici poteſt, vt Deliquii

Luna-

Lunaris obſeruationes inſigniter ab inuicem differant. Hiſce rationum momentis adducuntur Aſtronomi recentiores, vt Solaribus Eclipſibus, quarum initium et finis ceteraeque phaſes et momenta accuratiſſime obſeruari poſſunt, praecipue ſi relicta veteri Eclipſes Solares in imagine Solis per Teleſcopium intromiſſa et in aduerſa tabula recepta obſeruandi methodo, Sol directe per Teleſcopium Micrometro munitum riteque adornatum obſeruatur, ad Elementa Tabularum Lunarium ſtabilienda plurima feliciſſimo vtantur cum ſucceſſu.

Ad Tabularum errores Longitudinis et Latitudinis Lunae definiendos accurata initii et finis Eclipſeos Solaris obſeruatio praecipue requiritur, determinata etiam per obſeruationem Diametro Lunae apparente; caetera enim elementa quibus innititur iſtorum errorum calculus, a Tabulis aſtronomicis mutuanda, non adeo aberrare poſſunt, vt concluſiones admodum erroneae exinde naſcantur. Ex. gr. paruulus error Parallaxeos Lunae horizontalis primo ex Tabulis deſumendae nullum errorem ſenſibilem Loco Lunae apparenti ex obſeruatis definiendo afferre valet; ſiquidem in hocce calculo non de Parallaxi abſoluta, ſed de differentia tantum Parallaxium in Longitudinem et Latitudinem ad initium et finem Eclipſeos agitur. Poſtea vero, vbi vera et Longitudo et Latitudo Lunae inueſtigatur, error in Parallaxi Lunae horizontali admiſſus notatu dignior euadit, praecipue in ſupputanda Longitudine vera Lunae longe a Nonageſimo Eclipticae gradu diſtantis, et in definienda Latitudine vera Lunae vbi altitudo Nonage-

ſimi gradus Eclipticae tempore Eclipſeos fuerit parua. Errores autem, quibus apparentis Loci Lunae calculus maxime inquinari poteſt, ab erronea Diametro Lunae et duratione Eclipſeos minus accurate obſeruata proficiſcuntur, quippe qui determinationem Longitudinis, inprimis vero Latitudinis Lunae inſigniter afficere valeant, magis tamen in magnis Eclipſibus quam in minoribus Deliquiis.

Tab. XII. Fig. 1. Vt autem clarius pateſcat, Eclipſes minores reſpectu errorum, qui ſiue obſeruatione ſiue in nonnullis elementis ad calculum adhibendis admitti poſſunt, magnis eſſe praeferendas, vbi de Tabularum erroribus Longitudinis et Latitudinis Lunae ex obſeruata Eclipſi definiendis agitur, ſit in S centrum Solis initio Eclipſeos: Referat PM portionem Eclipticae; N$l$ lineam Eclipticae parallelam. Fingatur Locus apparens centri Lunae initio Eclipſeos in N, in fine Eclipſis autem reſpectu Solis in L. Ponamus igitur ſummam Semidiametrorum apparentium Lunae et Solis SN (breuitatis cauſa $=$ SL) $= r$: ſemitam apparentem Lunae a Sole ab initio ad finem vſque Eclipſeos per NL exhibitam $= x$: angulum $l$NL $= e$: Latitudinem viſam centri Lunae initio Eclipſeos, ſiue NP $= y$ et in fine Eclipſis LM $= z$. Erit igitur coſin. SNL $= \frac{x}{2r}$ et ſin. SNL $= \frac{\sqrt{(4r^2 - x^2)}}{2r}$, hinc ſin. SN$l$ $=$ ſin. NSP $= \frac{\text{coſ.} e}{2r} \sqrt{(4r^2 - x^2)} - \frac{x \,\text{ſin.} e}{2r}$, et $y = \frac{1}{2} \text{coſ.} e \sqrt{(4r^2 - x^2)} - \frac{1}{2} x \,\text{ſin.} e$. Si ponamus nunc errorem exiguum in Semidiametro Lunae apparente ineſſe $= dr$, error Latitudinis Lunae exinde oriundus, ſiue $dy$

ex

ex formula ſupra tradita colligitur $= \frac{2 \cdot r \cdot coſ.e \cdot dr}{\sqrt{(4r^2 - x^2)}} = \frac{2r.\, coſ.^2 e.\, dr}{2y + x.\, ſin.\, e}$. Cum vero quantitas $x.ſin.e.$ exprimat motum apparentem Lunae in Latitudinem pro duratione Eclipſeos, prodibit $dy = \frac{2r.\, coſ.^2 e.\, dr}{y + z}$. Ex hac formula intelligitur, errorem de quo nunc agitur, in magnis Eclipſibus, ceteris paribus, maioris eſſe momenti quam in minoribus, propter quantitatem $y + z$ in his maiorem quam in illis. Eadem ratione probatur, errorem in Latitudine Lunae ex erronea Diametro Lunae apparente enaſcentem, ſi eadem Eclipſis in duobus pluribusue locis fuerit obſeruata, quam proxime eſſe in ratione inuerſa ſummae Latitudinum Lunae initio et in fine Eclipſeos in ſingulis locis obſeruatarum: vnde ſequitur, Latitudinem Lunae ab obſeruationibus in loco vbi Eclipſis minor fuerit, habitis deriuatam, hoc quidem reſpectu, ceteris paribus paulo tutiorem eſſe, quam ea eſt quae per obſeruationes eiusdem Eclipſis in loco vbi Eclipſis maior viſa fuerit, inſtitutas definitur.

Ponamus nunc nullum irrepſiſſe errorem in Diametrum Lunae apparentem, Obſeruatorem autem erraſſe in duratione Eclipſeos, a qua pendet ſemita apparens Lunae a Sole, ſiue linea NL, et errorem hunc in motu apparenti Lunari durationi Eclipſeos debito admiſſum aequari $dx$. Habebimus itaque errorem Latitudinis Lunae ipſi $dx$ reſpondentem, ſiue $dy = \frac{1}{2} dx \left(\frac{x.\, coſ.\, e}{\sqrt{(4r^2 - x^2)}} + ſin.\, e\right) = \frac{1}{2} dx \left(\frac{x.\, coſ.^2 e}{2y + x.\, ſin.\, e} + ſin.\, e\right) = \frac{1}{2} dx \left(\frac{x.\, coſ.^2 e}{y + z} + ſin.\, e\right)$. Patet

igitur, Latitudinem Lunae determinandam ab errore in duratione Eclipſeos admiſſo minus, quam ab errore qui ex erronea Diametro Lunae apparente ortum ducit, ſi errores illi inter ſe fuerint aequales, affici. Simili modo intelligitur, errorem in Latitudine Lunae definienda ex duratione Eclipſeos minus accurate obſeruata genitum, ceteris paribus, notabiliorem eſſe in magnis Eclipſibus quam in minoribus.

Errores iſti, quorum effectum in Latitudine Lunae ex obſeruationibus Eclipſeos definienda nunc conſiderauimus, multo minus afficiunt Longitudinem Lunae, ſiue diſtantiam eius a Coniunctione apparente cum Sole in Ecliptica ex iisdem obſeruationibus deducendam; etenim dimidium tantum erroris in motu Lunae apparente durationi Eclipſeos reſpondente admiſſi circiter in Longitudinem Lunae, ſiue in diſtantiam eius a Coniunctione apparente cum Sole in Ecliptica determinandam cadit. Simili modo haud difficulter intelligitur, ſi ſemita Lunae apparens ad Eclipticam non fuerit inclinata, Longitudinem Lunae ex obſeruata Eclipſi eruendam, ab errore in Diametro Lunae apparente admiſſo omnino non variari: Cum vero ſemita illa Lunae ad Eclipticam aliquantum ſit inclinata, error in Diametro Lunae apparente admiſſus oppido exiguum producere valet errorem in Longitudine Lunae ex obſeruatis Eclipſeos deducenda, qui tamen paulo maior euadere poteſt in magnis Eclipſibus, quam in minoribus.

Ex hiſce meditationibus colligitur, in accurata apparentis Diametri Lunaris obſeruatione ad Tabularum

Luna-

Lunarium errores ex obſeruatis Eclipſibus exacte definiendos maxima eſſe momenta. Haec autem obſeruatio accuratiſſime inſtitui poteſt ope excellentiſſimi Micrometri, cuius beneficio Diameter Lunae apparens commodiſſime dies aliquot ante et poſt Eclipſin obſeruari et Tabularum praeſtantiſſimarum adminiculo ad tempus Eclipſeos reduci poteſt. Alia quidem methodus difiniendae Diametri Lunaris in Eclipſibus obſeruata ſimul in diſco Solari et chorda et quantitate defectus, dataque Diametro Solari innititur; ſed paulo incertior eſſe videtur; quam ob cauſam annulares Eclipſes hoc gaudent commodo, vt apparentis Diametri Lunaris directe exactiſſimeque obſeruandae copiam faciant; quae Diametri Lunaris capiendae opportunitas perſoluendae quaeſtioni, vtrum Diameter Lunae in diſco Solari conſpicuae minor appareat, quam in eadem ab oculo diſtantia extra illum, inſeruire poteſt aptiſſime: quae quidem Diametri Lunaris apparentia obſeruationibus Cel. *le Monnier*, Acad. Reg. Scient. Pariſ. Aſtronomo in Eclipſi Solari An. 1748. habitis probata eſſe non videtur.

Famoſiſſimum illud Deliquium Solis, quod contigit d. 25 Iulii An. 1748. cum propter circumſtantias nonnullas ſingulares atque notatu digniſſimas omnes rerum coeleſtium Speculatores rarioris huius Phaenomeni obſeruandi cupiditate inſtammauerit, et nonnullos ad ea loca allexerit, vbi ſpes erat rariores huius Eclipſis obſeruandi circumſtantias: mea etiam circa hanc Eclipſin obſeruata measque meditationes et inquiſitiones in errores Tabularum Lunarium ex obſeruatis huius Eclipſeos

ad obſeruationes quas Berolini ſumma diligentia inſtitui circa Eclipſin Solis, quae contigit d. 8. Ian. 1750. comparandis deducendos communicare et in hac diſſertatione explicare conſtitui. Ante vero quam ad calculum aggrediar, ſummam obſeruationum DD. *Mortimer*, *Beuis* et *Stiffens* V. Cl. mihique coniunctim circa Eclipſin Solarem An. 1748. Londini in Aedibus Marlboroughenſibus habitarum referre iuuat. Viri Cl. *Beuis* et *Stiffens* ad Eclipſin hanc diligentiſſime obſeruandam Tubo vtebantur aſtronomico 12. pedum ad famoſiſſimum Teleſcopium reflectens 12. pedum applicato, ego autem adhibebam Teleſcopium reflectens 2 pedum ad obſeruandum Solem accommodatum. Hiſce ita adornatis, initium Eclipſeos nobis Coelo eximie ſereno per vtrumque Teleſcopium accuratiſſime obſeruabatur d. $\frac{14}{25}$ Iulii a. m. $9^h.4'.20''$. temp. appar.

Tab. XII. Fig. 2. Diſco Solari variarum macularum congerie in Fig. 2. exhibita conſpicuo, ſequentes obſeruabamus limbi Lunaris ad maculas Solares appulſus:

d. 25 Iulii mane $9^h.39'.42''$. t. app. macula *a* penitus a limbo Lunari tegebatur.
9. 53. 0. - - - Macula maxima *b* penitus obſcurabatur: haec obſeruatio aliquantum propter [illegible] dubia.
10. 12. 8. - - - Prima macula ex tribus illis quae ad limbum Solis orientalem ſitae erant, [illegible] cabatur a margine Lunae.

Hiſce obſeruationibus peractis, Coelum nubibus obtegebatur; quam ob rem finis Eclipſeos obſeruandi copia erat nulla. Limbus Lunae haud perfecte apparebat,

circu-

circularis, variis inaequalitatibus per Teleſcopia ſatis notabilibus in illo viſis.

Vt harum obſeruationum fructum capiamus, Tabularum errores cum Longitudinis tum Latitudinis Lunae exinde ſunt definiendi: id quod facillime fieri poſſet, ſi finis Eclipſeos Londini etiam obſeruata fuiſſet; huius autem Eclipſeos momenti obſeruatione deſtitutus, ad obſeruationes alio quodam in loco habitas deſcendam neceſſe eſt. Hunc itaque in finem iis vtar obſeruationibus, quae de eadem Eclipſi Solari Berolini ſunt peractae. Ibi enim initium Eclipſis annularis, ſiue initium circuli e Solari diſco reſidui lucidi adnotatum eſt d. 25 Iulii a. m. 11$^h$.52′.51″. t. app. finis autem totius Eclipſeos contigit p. m. 1$^h$.25′.9″. t. app. Quamuis obſeruationes ſupra relatae in diuerſis inſtitutae ſint locis, nihil eſt quod eas ad Tabularum errores accuratiſſime eruendos non adhibeamus, modo vt Differentia Meridianorum Berolinum inter et Londinum debita praeciſione ſit determinata: hocce vero negotium alias iam obſeruatae Occultationis Palilicii a Luna beneficio perfeci demonſtrauique Differentiam Meridianorum inter Obſeruatorium Reg. Berolinenſe et Aedes Societatis Regiae Londinenſis eſſe 54′.1″ temp. cum vero Aedes Marlboroughenſes ab Aedibus Societatis Reg. Londinenſis 5″. temp. Occidentem verſus ſint remotae, prodibit ex noſtro calculo Differentia Meridianorum inter Obſeruatorium Reg. Berolinenſe et Aedes Marlboroughenſes, vbi noſtra habita fuit obſeruatio, = 54′.6″. temp.

Obſer-

Obſeruationes ſupra exhibitas conſideranti duae patent ad definiendos Tabularum errores viae: primum enim initium Deliquii huius Solaris Londini obſeruatum ad momentum initii Eclipſis annularis Berolini notatum, deinde autem Eclipſis annularis initium ad finem totius Eclipſeos Berolini viſum comparari poſſe intelligitur; ita vt duplici hacce comparatione peracta, concluſiones eo certiores adepturi ſimus. Initium igitur Deliquii huius Solaris Londini obſeruatum et initium Eclipſeos annularis Berolini notatum primo adhibiturus Locum Solis ex Tabulis Solaribus Cel. *Euleri* ſupputando calculum adoriar. Longitudo ergo media Solis ad Meridiem medium d. 25 Iulii ſub Merid. Berol. erit ſecundum memoratas Tabulas $4^s.3^\circ.29'.58''$. Poſita nunc maxima aequatione centri Solis $= 1^\circ.55'.55''$ et admiſſa Obliquitate Eclipticae $= 23^\circ.28'.35''\frac{1}{2}$ prodibit Aſcenſio recta veri Loci Solis ad idem temporis momentum $= 124^\circ.59'.45''\frac{3}{4}$ atque igitur erit aequatio temporis ad Meridiem medium d. 25. Iulii $= 5'.59''\frac{1}{4}$, add. Sole autem tunc verſante in puncto Eclipticae, vbi aequatio temporis fere eſt maxima, manifeſtum eſt, eam per ſpatium temporis ſatis magnum nulli obnoxiam eſſe variationi ſenſibili; adeo vt eandem tuto aſſumere poſſimus aequationem temporis pro initio et fine Eclipſeos quam ſupra pro Meridie inuenimus.

Hac itaque temporis correctione vſus inueni initium Eclipſeos Londini obſeruatum et ad Meridianum Berolinenſem reductum d. 24. Iulii $22^h.4'.25''\frac{1}{4}$ temp. med.

med. aſtron. ſimiliterque habebimus initium Eclipſeos annularis Berolini notatum d. 24. Iulii $23^h.58'50''\frac{1}{4}$ temp. med. aſtron. Ad duo illa temporis momenta Locum Solis verum ſecundum Tabulas Cel. *Euleri*, adhibita aequatione maxima centri Solis ſupra notata, Lunae autem Locum verum eiusdemque Diametrum horizontalem apparentem et Parallaxin horizontalem ſecundum numeros Lunares Cel. *Halleii* ſupputaui et vna cum Diametro apparente Solis in ſequenti Tabella exhibui.

| | Longitudo vera Solis | Longitudo vera Lunae | Latitudo vera Lunae | Diam. ☉ lis ap. | Diam. ☽ ae ap. | Parall. ☽ ae horiz. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| itio Eclipſeos ondini obſ. d. 24 l. $21^h.10'.19''\frac{1}{4}$ mp. med. | s ° ′ ″<br>4.2.37.48,5 | s ° ′ ″<br>4.1.39.6,7 | ° ′ ″<br>0.33.57,5 Bor. | ′ ″<br>31.41 | ′ ″<br>29.27 | ′ ″<br>53.31,5 |
| itio Eclipſeos ularis Berolini d. 24 Iulii $^h.58'.50''\frac{1}{4}$ np. med. | 4.2.42.22 | 4.2.35.16,5 | 0.28.47. Bor. | 31.41 | 29.27,2 | 53.31,9 |

Peruenimus nunc ad ſupputandam Parallaxin Lunae tum in Longitudinem cum in Latitudinem, cuius definiendae gratia Nonageſimum Eclipticae gradum eiusque altitudinem et diſtantiam veram centri Lunae a Nonageſimo gradu Eclipticae ad momenta Eclipſeos ſupra notata determinaui et appoſitae Tabellae inſerui. Calculus autem iſte innititur Eleuatione Poli Berolinenſi

52°. 31′: Eleuatione Poli Londinenſi 51°. 32′: Obliquitate Eclipticae 23°. 28′. 35″ et denique Aſcenſione recta Solis ad Meridiem medium d. 25 Iulii ſub Merid. Berol. 124°. 59′. 45″$\frac{3}{4}$, ſub Meridiano Londinenſi autem 125°. 1′. 59″$\frac{3}{4}$.

| | Nonageſimus gradus Eclipticae | Altitudo Nonageſimi gradus Eclipticae | Diſtantia vera centri Lunae a Nonageſimo |
|---|---|---|---|
| Ad initium Eclipſeos $21^h$. 10′ 19″$\frac{1}{4}$. temp. med. | $2^s$. 24°. 42′. 43″ | 61°. 48′. 17″ | 36°. 56′. 24″ Ori. verſus |
| Ad initium Eclipſeos annularis $23^h$. 58′. 50″$\frac{1}{4}$. temp. med. | 3. 24. 5. 11. | 58. 5. 14 | 8. 30. 5 Ori. verſus |

Ex hiſce elementis et Parallaxi Lunae horizontali ſupra ex Tabulis *Halleianis* inuenta ſequentem deduxi Parallaxin Lunae a Sole et in Longitudinem et in Latitudinem, poſita Parallaxi Solis horizontali = 12″.

| | Parallaxis Lunae a Sole in Longitudinem | Parallaxis Lunae a Sole in Latitudinem |
|---|---|---|
| Ad initium Eclipſeos Londini obſeruatum | 28′. 33″ Orient. verſus | 25′. 10″ |
| Ad initium Eclipſeos annularis Berolini obſeruatum | 6. 46, 8 Orient. verſus | 28. 10, 8 |

Altitu-

Altitudo denique apparens centri Lunae ad initium Eclipſis ſupra Horizontem Londinenſem aequatur 44°½ eiusdemque altitudo apparens ſupra Horizontem Berolinenſem ad initium Eclipſis annularis 57°; vnde emergit incrementum Diametri Lunae horizontalis ad primum momentum = 19″, 5 ad alterum vero = 23″,3. Hiſce correctionibus rite applicatis, prodibit Diameter Lunae apparens ad initium Eclipſeos Londini = 29′,46″, 5 et ad initium Eclipſis annularis Berolini = 29′.50″,5.

Datis iam elementis omnibus quae ad Tabularum errores definiendos requiruntur, calculum ipſum adminiſtraturi Longitudinem aeque ac Latitudinem Lunae apparentem ex obſeruatis Eclipſeos momentis ſequenti modo determinabimus.

Inuenta eſt ſupra Semidiameter apparens Solis ad diem Eclipſeos = 15′.50′,5; Lunae autem Semidiameter apparens ad initium Eclipſeos Londini fuit = 14′.53″, 2 et ad initium Eclipſeos annularis Berolini = 14′.55″,2. Ex his colligimus ſummam Semidiametrorum apparentium Solis et Lunae pro initio Eclipſeos Londini obſeruato = 30′.43″,7 earumque differentiam pro momento initii Eclipſis annularis Berolini notati = 55″, 3; quae differentia aequatur diſtantiae apparenti centrorum Solis et Lunae ad praedictum temporis momentum. Inuenimus quoque ex Tabulis Longitudinem Lunae veram ad initium Eclipſeos = 4ˢ. 1°. 39′. 6″, 7 et ad initium Eclipſis annularis

 = 4ˢ.

$= 4^s. 2^\circ. 35' 16'',5$; ita vt motus Lunae verus in Longitudinem pro tempore a primo initio Eclipſeos ad initium Eclipſis annularis praeterlapſo, ſiue pro $1^h. 54'. 25''$ ſit $= 56' 9'',8$. Cum vero Parallaxis in Longitudinem Lunae a Sole initio Eclipſeos fuerit $28'. 33''$ Ortum verſus et initio Eclipſis annularis $6'',46'',8$ itidem Ortum verſus, prodibit motus apparens Lunae in Longitudinem inde a primo initio Eclipſeos ad initium vsque Eclipſis annularis $= 34'. 23'',6$. Simili modo, cum Latitudo Lunae vera pro initio Eclipſeos inuenta ſit $= 0^\circ. 33'. 57'',5$ et pro initio Eclipſis annularis $= 0^\circ. 28'. 47''$ Bor. Parallaxis autem Lunae a Sole in Latitudinem Lunam in hoc temporis momento $25'. 10''$ et in illo $28'. 10'',8$ Auſtrum verſus depreſſerit, habebitur motus Lunae verus in Latitudinem pro temporis ſpatio quod a primo initio Eclipſis ad initium vsque Eclipſis annularis effluxit, $= 5'. 10'',5$ Auſtrum verſus; motus autem Lunae apparens in Latitudinem ad idem temporis ſpatium erit $= 8'. 11'',3$ itidem Auſtrum verſus. Motus denique verus *Solis* in Ecliptica ad praedictum temporis interuallum ex Tabulis Solaribus collectus aequatur $4'. 33'',5$.

Tab. XII. Fig. 3. Repraeſentet nunc ESC chordam parui arcus Eclipticae; et in illa ſit S Locus Solis verus tempore primi initii Eclipſeos, *s* autem Locus Solis verus ad tempus initii Eclipſis annularis. Sit porro N Locus Lunae apparens, ſiue viſus, initio Eclipſeos, et L Locus eius apparens ad initium Eclipſis annularis; ita vt EC linea

 circulis

circulis Latitudinum NE et CL comprehenſa motui Lunae apparenti in Longitudinem interuallo temporis a primo Eclipſeos initio ad initium usque Eclipſis annularis praeterlapſi reſpondenti aequetur. Ducta Eclipticae parallela ML a puncto L ad punctum M circulum Latitudinis NE in M ſecante, linea NM exhibebit motum Lunae apparentem in Latitudinem a primo initio Eclipſeos ad initium vsque Eclipſis annularis. Si iungantur porro centra Solis et Lunae lineis NS et $sL$ manifeſtum eſt, lineam NS aequari ſummae Semidiametrorum apparentium Lunae et Solis in primo initio Eclipſeos, earum autem differentiam initio Eclipſis annularis exhiberi per lineam $sL$. Fiat denique interuallum LP aequale interuallo $Ss$, et erit $SP = sL$, atque hinc MP = motui apparenti Lunae a Sole in Longitudinem pro tempore inter primum initium Eclipſeos et initium Eclipſis annularis intercepto, ita vt, ſi Sol per iſtud temporis interuallum fingatur in S. immobilis, Locus Lunae apparens relatiuus tempore initii Eclipſis annularis ſit in P.

Cardo igitur noſtrae diſquiſitionis in eo nunc vertitur, vt calculo ſubducto, differentiam inter Longitudinem apparentem Lunae et Longitudinem veram Solis tum ad primum initium Eclipſeos, cum ad initium Eclipſis annularis, h. e. valores rectarum ES et $sC$ vna cum Latitudinibus Lunae viſis EN et LC determinemus. Ad hocce efficiendum habebimus in Triangulo plano NML, rectangulo ad M, crus $ML = 34', 23'', 6$ et alterum crus $NM = 8'. 11'', 3$; vnde deducuntur

 hypo-

hypotenuſa NL = 35′.21″,1 et angulus NLM = 13°.22′.33″. In Triangulo porro rectilineo NPL latus NL eſt = 35′.21″,1, latus PL = 4′.33″,5 et angulus interiectus NLP = 13°.22′.33″, proinde per reſolutionem huius Trianguli eruuntur angulus NPL = 164°.40′.14″½ et latus NP = 30′.56″,5. Datis nunc in Triangulo NSP tribus lateribus, nimirum NP modo inuentum, NS = 30′.43″,7 et SP = 55″,3 obtinebimus angulum NPS = 76°.10′.17″½ et angulum NSP = 102°.9′.34″¾: cum vero NPM angulus ſit = 15°.19′.45″½, prodibit angulus MPS = ang. LſC = 60°.50′.32″; ſimiliterque ang. NSE erit = 16°.59′.53″¾. Cognitis iam in Triangulo NSE ad E rectangulo hypotenuſa NS et angulo N*S*E, facili negotio determinabimus NE, ſiue Latitudinem apparentem Lunae ad initium Eclipſeos = 0°.8′.59″,6. Bor. itemque diſtantiam apparentem Lunae a Sole in Ecliptica ad idem temporis momentum, ſiue ES = 29′.23″,2. Simili modo inuenientur in Triangulo rectangulo SLC Latitudo Lunae apparens ad initium Eclipſis annularis, ſiue LC = 0°.0′.48″,3 Bor. et diſtantia apparens Lunae a Sole in Ecliptica per ſC expreſſa = 26″,9. Hisce itaque inſtructi accurate aſſignare poſſumus Locum Lunae verum obſeruationibus circa hanc Eclipſin inſtitutis innixum. Poſita nimirum Longitudine Solis vera ad primum initium Eclipſeos Londini obſeruatum = 4ſ.2°.37′.48″½ et admiſſa Parallaxi Lunae a Sole cum in Longitudinem tum in Latitudinem ſupra definita, colligitur Locus Lunae verus ſequenti Tabellae vna cum

cum Loco Lunae vero ex Tabulis *Halleianis* deſumto inſertus.

| | Longit. vera ☽ae ſec. Tab. Halleian. | Latit. vera ☽ae ſec. Tab. Halleian. | Longit. vera ☽ae ex obſeruat. deducta. | Latit. vera ☽ae. ex obſeruat. deducta. |
|---|---|---|---|---|
| h ′ ″ 24. Iulii 22. 4. 25. temp. med. ſub Merid. Berol. | s ° ′ ″ 4. 1. 39. 6, 7 | ° ′ ″ 0. 33. 57, 5 Bor. | s ° ′ ″ 4. 1. 39. 52, 2 | ° ′ ″ 0. 34. 9, 6 Bor. |
| h ′ ″ 24. Iulii 23. 58. 50¼ t. med. ſub Merid. Berol. | 4. 2. 35. 16, 5 | 0. 28. 47 Bor. | 4. 2. 36. 2 | 0. 28. 59, 1 Bor. |

Comparatione inter Locum Lunae ſupputatum et obſeruatum inſtituta, apparet Longitudinem Lunae veram ex obſeruationibus huius Eclipſeos collectam ſuperare eam quae numeris Lunaribus *Halleianis* innititur, 45 min. ſec. Si vero Locus Lunae verus ſupputetur ſecundum Tabulas Lunares Cel. *Flamſteedii* quae in *Inſtitutions aſtronomiques* Cel. *le Monnier* occurrunt, prodibit Longitudo Lunae vera ad initium Eclipſeos 4ˢ. 1°. 40′. 14″ adeoque 22″ maior ea quam ſupra ex obſeruata Eclipſi Solari inuenimus. Quod ad Latitudinem Lunae veram attinet, palam eſt, Tabulas *Halleianas* eam ſecundum noſtrum calculum in hac Eclipſi 12″ iuſto minorem exhibere. Vt autem eo certius de exiguis illis Tabularum erroribus pronunciare poſſimus, ſimilem inſtituemus horum errorum calculum obſeruatione initii Eclipſis annularis et finis totius Eclipſeos Berolini habita ſuffultum.

Initio

Initio huius diſſertationis iam notauimus, finem huius Eclipſeos Berolini eſſe obſeruatum d. 25. Iulii $1^h.25'.9''$. temp. app. id quod reductione facta, reſpondet d. 25. Iulii $1^h.31'.8''\frac{1}{2}$. temp. med. Ad ordinem huius calculi ſeruandum Loca Lunae et Solis vera tum ad initium Eclipſis annularis cum ad finem totius Eclipſeos ſupputanda ſunt; cum vero elementa omnia quibus ad hunc calculum inſtituendum opus eſt, ad primum Eclipſeos momentum ſupra iam ſint notata, ea ſolum nunc determinabo atque referam, quae ad finem Eclipſis ſpectant. Inueni igitur ad momentum finis Eclipſeos Longitudinem Solis veram $= 4^s.2^\circ.46'.1''\frac{2}{3}$: Longitudinem Lunae veram ſecundum Tabulas *Halleianas* $= 4^s.3^\circ.20'.37''\frac{1}{3}$ eiusque Latitudinem veram $= 0^\circ.24'.36'',5$ Bor. itemque Diametrum Lunae horizontalem $= 29'.27'',4$ et Parallaxin eius horizontalem $= 53'.32'',2$. Poſitis etiam vt in praecedenti calculo, Aſcenſione recta Solis ad Meridiem medium d. 25 Iulii ſub Merid. Berol. $= 124^\circ.59'.45''\frac{3}{4}$; Obliquitate Eclipticae $= 23^\circ.28'.35''$, et Eleuatione Poli Berol. $= 52^\circ.31'$, colligimus Nonageſimum gradum Eclipticae $4^s.10^\circ.1'.56''$ eiusque altitudinem $53^\circ.12'.35''\frac{1}{7}$, vnde deriuatur diſtantia vera Lunae a Nonageſimo gradu Ecliptiquae $= 6^\circ.41'.19''$ Occidentem verſus. Hiſce admiſſis, prodibit ad finem Eclipſeos Parallaxis Lunae a Sole in Longitudinem $= 5'.2'',2$ Occidentem verſus, et in Latitudinem $= 32'.1'',6$.

Altitudo Lunae apparens ſupra Horizontem Berol. initio Eclipſis annularis fuit $57^\circ$ et circa finem

Eclipſis

Eclipſis $52^{\circ}.30'$; quare incrementum Diametri Lunae horizontalis ad primum temporis momentum erit $= 23'',3$ et ad alterum $= 22'',1$ adeoque Diameter Lunae apparens tempore initii Eclipſis annularis $= 29'.50'',5$ et pro fine totius Eclipſeos $= 29'.49'',5$.

Ad calculum errorum Tabularum progreſſus, nunc primo loco diſtantiam apparentem centrorum Solis et Lunae et ad initium Eclipſis annularis et ad finem totius Eclipſeos definiturus ſum; ablata hunc in finem Semidiametro Lunae apparente ad initium Eclipſis annularis $14'.55'',2$ a Semidiametro Solis apparente $15'.50'',5$; reſtabit diſtantia centrorum apparens ad iſtud temporis momentum $0'.53'',3$. Simili modo, addita Semidiametro Solis ad Semidiametrum apparentem Lunae $14'.54'',7$, prodibit diſtantia centrorum pro fine totius Eclipſeos $30'.45'',2$. Cum porro motus apparens Lunae tum in Longitudinem cum in Latitudinem interuallo temporis inter initium Eclipſis annularis et finem totius Eclipſeos reſpondens requiratur, eum nullo fere negotio ex motu eius vero et Parallaxi ſic eruere poſſumus: Motus Lunae verus in Longitudinem praedicto temporis interuallo reſpondens: ex Locis Lunae veris ſupra notatis colligitur $= 45'.20'',8$; motus autem eius verus in Latitudinem pro eodem temporis ſpatio aequatur $4'.10'',5$ Auſtrum verſus; ſed quia Parallaxis Lunae a Sole in Longitudinem tempore initii Eclipſis annularis reperta fuit $= 6'.46'',8$ Orientem verſus, et tempore finis totius Eclipſeos

 $= 5'$

$= 5'.2'',2$ Occidentem verſus, habebimus motum apparentem Lunae in Longitudinem ab initio Eclipſis annularis ad finem vsque totius Eclipſeos $= 33'.31'',8$. Eodem modo ob Parallaxin Lunae a Sole in Latitudinem initio Eclipſis annularis $= 28'\ 10'',8$ et in fine totius Eclipſeos $= 32'.1''.6$, prodibit motus Lunae apparens in Latitudinem eidem temporis ſpatio reſpondens $= 8'.1'',3$. Auſtrum verſus. Motus denique Solis ad iſtud temporis interuallum ex Locis eius ſupra notatis deductus aequatur $3'.39''\frac{1}{3}$.

Tab. XII. Fig. 4. Sit itaque S Locus Solis verus tempore initii Eclipſis annularis, et N Locus Lunae apparens ad idem temporis momentum. In fine autem totius Eclipſeos ſit *s* Locus Solis verus et L Locus Lunae apparens. Ducta a puncto L linea LM Eclipticae parallela, factoque in illa interuallo LP = S*s* = motui Solis vero, qui temporis ſpatio inter initium Eclipſis annularis et finem totius Eclipſeos reſpondet, oppido manifeſtum eſt, ſi Sol pro iſto temporis ſpatio fingatur in S immobilis, Locum Lunae apparentem reſpectu huius Loci Solis fixi in fine Eclipſeos fore in P; ita vt recta SP = *s*L repraeſentet ſummam Semidiametrorum apparentium Lunae et Solis ad finem Eclipſeos, recta autem SN exhibeat centrorum Lunae et Solis diſtantiam apparentem ad initium Eclipſis annularis. Demiſſis a punctis N et L in Eclipticam perpendicularibus NEM et CL, EC = ML exhibebit motum Lunae apparentem in Longitudinem pro temporis ſpatio inter initium Eclipſis annularis et finem totius

Eclipſeos

Eclipſeos intercepto, lineis NE et CL Latitudinem Lunae apparentem ad duo iſta momenta denotantibus.

Ad valores nunc rectarum NE, CL, SE et Cs definiendos habebimus ex praemiſſis in Triangulo NML ad M rectangulo, NM = 8′.1″,3 et ML = 33′ 31″,8; vnde deducimus NL = 34′. 28″,6 et angulum NLM = 13°. 27′. 16″,1. Datis porro in Triangulo NLP latere NL et angulo NLP modo inuentis, et latere PL = 3′. 39″⅔, colligimus latus NP = 30′. 55″,6 et angulum NPL = 164°. 58′. 1″,9 adeoque angulum NPM = 15°. 1′. 58″,1. Cognitis autem in Triangulo NSP tribus lateribus, nimirum NP = 30′. 55″,6; SN = 0′. 55″,3 et SP = 30′. 45″,2; inuenientur angulus NSP = 100°. 2′. 8″,1 et angulus NPS = 1° 40′. 54″; quoniam vero angulus NPM prius inuentus eſt = 15°. 1′ 58″,1 prodibit angulus SPM = PSC = CsL = 13°. 21′. 4″,1; atque adeo angulus NSE erit = 86°. 41′. 4″. Dantur igitur in Triangulo NSE ad E rectangulo, hypotenuſa SN et angulus NSE modo inuentus: quare ex reſolutione huius Trianguli colligimus Latitudinem Lunae apparentem ad initium Eclipſis annularis, ſiue NE = 0°. 0′. 55″,2 Bor. itemque differentiam inter Longitudinem veram Solis et Longitudinem apparentem Lunae pro eodem temporis momento per SE exhibitam = 3″,2. Pari modo, cum in Triangulo CsL ad C rectangulo dentur hypotenuſa sL et angulus CsL, proueniet Latitudo apparens Lunae pro fine totius Eclipſeos, CL = 0°. 7′. 6″,1 Auſtr.

 diſtan-

diſtantia autem apparens in Ecliptica centrorum Solis et Lunae ad idem temporis momentum $C s$ erit $= 29'.55'',3$.

Si ponamus igitur Longitudinem Solis veram ad initium Eclipſis annularis $= 4^s.2^\circ.42'22''$, facili negotio inueniemus ex prius inuentis Locum Lunae apparentem ad notata Eclipſeos momenta; cui ſi applicetur Parallaxis Lunae tum in Longitudinem cum in Latitudinem ſupra definita, habebimus Loca Lunae vera obſeruata Locis eius veris ſecundum Tabulas *Halleianas* computatis, vt ſequitur, appoſita.

| | Longitudo Lunae computata. | Latitudo Lunae computata. | Longitudo Lunae obſeruata. | Latitudo Lunae obſeruat. |
|---|---|---|---|---|
| 24. Iul. $23^h.58'.50''\frac{1}{4}$ t. med. ſub Merid. Berol. | $4^s.2^\circ.35'.16''\frac{1}{2}$ | $0^\circ.28'.47''$ Bor. | $4^s.2^\circ.35.38''\frac{1}{2}$ | $0^\circ.29'.6''$ Bor. |
| 25. Iulii $1^h.31'.8''\frac{1}{4}$ t. med. ſub Merid. Berol. | 4 3. 20. $37\frac{1}{3}$ | 0. 24. $36\frac{1}{2}$ Bor. | 4. 3. 20. $59\frac{1}{3}$ | 0. 24. 55 Bor. |

Si loca haec inter ſe conferantur, ſtatim apparet, Longitudinem Lunae ex obſeruatis deductam $22''$ exſuperare Longitudinem ex Tabulis *Halleianis* deſumtam, et $43''$ deficere a Longitudine Lunae ſecundum Tabulas *Flamſteedianas* computata; id quod tantillum deflectit ab eo quod per priorem calculum determinauimus; figuram autem inſpicienti latere non poteſt, Triangula ita eſſe conſtituta, vt minimus error ſiue in dura-

duratione Eclipſeos, ſiue in Diametris apparentibus Lunae Soliſve admiſſus notabilem ſatis errorem procreare valeat in diſtantia apparente Lunae a Sole in Ecliptica, adeoque in Longitudine Lunae vera exinde eruenda: quam ob rem tutius ſtatuere poſſumus Tabulas *Halleianas* Longitudinem Lunae veram in hac Eclipſi Solari 30. tantum min. ſec. iuſto minorem exhibere; ſiue quod eodem redit, Longitudinem Lunae veram tempore finis totius Eclipſeos Berolini notato d. 25. Iulii $1^h. 31'. 8''\frac{1}{4}$. temp. med. fuiſſe $= 4^s. 3^\circ. 21'. 7''$.

Latitudo Lunae vera quae ex noſtro colligitur computo, $19''$ exſuperat eam quae Tabulis *Halleianis* innititur: in priore autem calculo eam 12 tantum min. ſec. et quod excedit maiorem inuenimus, quam ſecundum Tabulas; ita vt differentia inter binos hoſce calculos in Latitudine Lunae aſſignanda ad 6 tantum $7^{ae}$ min. ſec. aſſurgat, et vera Latitudo Lunae ad finem totius Eclipſeos Berolini obſeruatum per medium inueniatur $= 0^\circ. 24'. 52''$ Bor. quae quidem Lunae Latitudo reſpondet eiusdem Longitudini verae $4^s. 3^\circ. 21'. 7''$. Si ponamus nunc ad iſtud tempus Longitudinem ☊ Lunae cum Tabulis *Halleianis* $= 10^s. 7^\circ. 46'. 40''$ et Inclinationem Orbitae Lunaris ad Eclipticam $= 5^\circ. 17'. 20''$, prodibit Latitudo Lunae vera eiusdem Longitudini verae ſupra inuentae $4^s. 3^\circ. 21'. 7''$ reſpondens $= 0^\circ. 24'. 34''$; ita vt remaneat differentia $18''$ inter Latitudinem Lunae computatam et obſeruatam; quae differentia ſiue errori Inclinationis Orbitae Lunaris, ſiue erroneo Loco Nodi Lunae, ſiue errori Parallaxeos eius horizontalis, ſiue denique errori cuidam ex exiguis illis erroribus, quibus

 forte

forte omnia haec elementa inquinata ſint, compoſito adſcribenda eſſe videtur. Diffitendum quidem non eſt, quaeſtionem hanc ex obſeruatione vnicae Eclipſeos perſolui non poſſe: interim tamen apparet, differentiam illam ab errore Inclinationis Orbitae Lunaris ortum praecipuum ducere non poſſe, eoque minus, quod ad calculum noſtrum ſupra expoſitum adhibuimus Orbitae Lunaris Inclinationem 5°. 17'. 30'', et conſequenter Inclinationem quam in optimis Tabulis Lunaribus adhuc editis inuenimus maximam. Sin autem differentiam illam 18'' inter Latitudinem Lunae computatam et obſeruatam ab erroneo Nodi Lunae Loco repetere velimus, neceſſe eſt, vt admiſſa Inclinatione Orbitae Lunaris ad Eclipticam in hac Eclipſi = 5°. 17'. 20'', Longitudo ☊ Lunae ſtatuatur = $10^s$. 7°. 50'. 1''; quae quidem ☊ Longitudo 3'. 20'' ſuperat Longitudinem ☊ ex Tabulis *Halleianis* deſumtam. Locus ☊ Lunae cum ſecundum Tabulas *Flamſteedii* et elementa Theoriae Lunaris *Newtoni* 1. min. prim. magis ſit promotus quam, iuxta Tabulas *Halleianas*, iſta Longitudo ☊ Lunae a *Flamſteedio* et *Newtono* ſtabilita $2\frac{1}{3}$ tantum min. prim. augenda eſſet, vt cum noſtro calculo concinat. Si denique differentiam illam 18'' ſupra inuentam errori Parallaxeos Lunae horizontalis tribuere fas eſt, facile intelligitur, Parallaxin Lunae horizontalem Tabulis innixam $\frac{1}{2}$ fere min. prim. eſſe minuendam, vt Tabulae cum obſeruationibus huius Eclipſeos Solaris conſpirent: cum vero Eclipſis Solaris, quae contigit d. 8. Ian. 1750. facta ſit in poſitione Lunae reſpectu Nodorum ſatis

apta

apta ad differentiam illam de qua agitur, ex comparatione harum Eclipſium obſeruatarum magis dilucidandam, ad referendas praedictae Eclipſeos obſeruationes atque concluſiones exinde deriuandas proficiſcimur.

## Obſeruatio Eclipſeos Solaris quae accidit An. 1750. Ianuarii die 8. ſt. n. Berolini habita: cui adiungitur calculus eiusdem Eclipſis Tabulis *Halleianis* innixus.

Apparatus ad Eclipſin hanc ſumma diligentia obſeruandam adhibui ad haſce obſeruationes inſtituendas excellentiſſimum Horologium aſtronomicum ſecundum praecepta Cl. *Grahami* affabre elaboratum, cuius vices per altitudines Solis correſpondentes ſedulo pridie et poſtridie Eclipſeos Quadrantis bipedalis radii adminiculo captas exploraui, adeo vt exactitudinem tum motus huius Horologii, cum obſeruationum ipſarum perſuaſam perſpectamque haberem. Miſſam hic facio relationem obſeruationum quae ad motum Horologii examinandum et tempus verum eruendum pertinent, ea tantum relaturus momenta, quae Eclipſin hanc ſpectant mihique Teleſcopii praeſtantiſſimi 8. pedali foco beneficio, Coelo toto Eclipſeos tempore eximie ſereno, praecipue obſeruata ſunt.

Initium

Tab. XII Initium Eclipſeos d. 7. Ianuarii ſt. n. $20^{h}.59'.19''\frac{1}{3}$ temp. app.
Fig. 6. Margo Lunae appellit ad inſigniorem maculam A 21. 32. 19 $\frac{1}{4}$
Immerſio totalis minoris maculae B - - 21. 35. 8
Emerſio totalis inſignioris maculae A - - 22. 7. 29
Finis Eclipſeos - - - - - - - - - 23. 20. 5 $\frac{1}{4}$, igitur

Duratio Eclipſeos - - - 2. 20. 46

eod. d. $22^{h}.4'.55''$ temp. app. pars lucida diſci Solaris $= 15'.18''\frac{1}{5}$
22. 21. 35 - - - - - - - - - - - $= 16.10$

Quia duratio huius Eclipſeos 5 circiter min. prim. minor fuit, quam calculus ex Tabulis *Flamſteedii* poſtulabat, facile eſt iudicatu, quantitatem etiam Eclipſeos paulo minorem fuiſſe, quam ſecundum memoratas Tabulas. Cum vero hic de erroribus Tabularum accuratius definiendis agitur, horum errorum calculum eo libentius inſtituam, quod duo illa momenta praecipua, initium nempe et finis Eclipſeos, maxima cum praeciſione mihi ſint obſeruata, errorum Tabularum computum certiſſimum redditura.

Negotium hocce aggreſſurus in aequationem temporis primum inquiſiui, eamque ad initium Eclipſeos inveni $= 7'.19''$ add. pro fine Eclipſeos autem $= 7'.21''\frac{1}{2}$ add. ita, vt initium huius Eclipſis contigerit d. 7. Ian. $21^{h}.6'.38''\frac{1}{3}$, finis vero $23^{h}.27'.26''\frac{3}{4}$ temp. med. ſub Merid. Berol. Ad duo iſta temporis momenta definientur Loca Solis ex Tabulis Cel. *Euleri*, Lunae autem Loca vera vna cum Diametris app. horiz. Lunae et Solis Parallaxique Lunae horizontali ſecundum Tabulas *Halleianas* vt ſequitur.

Ad

| | Longitudo vera Solis. | Longitudo vera Lunae. | Latitudo vera Lunae. | Diam. ☉lis app. | Diam ☽ae ap horiz | Parall. ☽ae horiz. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ad initium Eclipſeos h ' " 7. Ian. 21. 6. $38\frac{1}{3}$ t. med. | s ° ' " 9. 18. 3. 7, 7 | s ° ' " 9. 17. 16 5, 1 | ° ' " 0.38 58,4 Bor | ' " 32.43 | ' " 32.21,9 | ' " 58.49,5 |
| Ad finem Eclipſeos h ' " 7. Ian 23. 27. $26\frac{3}{4}$ t. med. | 9. 18. 9. 6, 4 | 9. 18. 39. 23,9 | 0. 46. 36,6 Bor. | 32.43 | 32.23,7 | 58. 52,8 |

Cum Aſcenſio recta Solis ad Meridiem medium d. 8. Ianuarii ſub Meridiano Berol. fuerit $= 289°. 41'. 36''$, colligimus ex illa et ex Obliquitate Eclipticae $23°. 28' 30''$ ad Latitudinem Berolinenſem $57°. 31'$ Nonageſimum gradum Eclipticae eiusque altitudinem et diſtantiam veram Lunae à Nonageſimo gradu, quae omnia ſequenti Tabellae ſunt inſerta.

| | Nonageſimus gradus Eclipticae | Altitudo Nonageſimi gradus | Diſtantia vera Lunae a Nonageſimo |
|---|---|---|---|
| Ad initium Eclipſeos | 7ˢ. 8° 26'. 27" | 18°. 14'. 40" | 68°.49'.38" Or. verſ. |
| Ad finem Eclipſeos | 9. 27. 48. 13 | 15 7. 5 | 9 8. 49 Occ. verſ. |

Ex hiſce datis facili negotio eruitur ad notata Eclipſis momenta Parallaxis Lunae a Sole et in Longitudinem et in Latitudinem, poſita Parallaxi horizontali Lunae a Sole pro initio Eclipſios $= 58'. 37'', 5$ et pro fine $= 58'. 40'', 8$.

| | Parallaxis Lunae a Sole in Longitudinem | Parallaxis Lunae a Sole in Latitudinem |
|---|---|---|
| Ad initium Eclipſeos | 17′.8″,9 Orient. verſus | 55′.42″,6 |
| Ad Finem Eclipſeos | 2. 26,7 Occid. verſus | 56. 41, 5 |

Deinde ex altitudine apparente centri Lunae tempore initii Eclipſeos $= 6^{\circ}\frac{1}{8}$ et pro fine $14^{\circ}\frac{1}{4}$ deducitur incrementum Diametri Lunae horizontalis ad primum Eclipſeos momentum $= 3'',6$, et ad alterum $= 8'',5$; ita vt Diameter Lunae apparens pro hoc temporis momento ſit $= 32'.32'',2$ et pro illo $= 32'.25'',5$ atque igitur ſumma Semidiametrorum apparentium Solis et Lunae initio Eclipſeos $= 32'.34'',2$ et in fine $= 32'.37'',6$.

Denique definitur ex ſupra traditis motus Lunae verus in Longitudinem pro duratione Eclipſeos obſervata $= 1^{\circ}.23'.18'',8$; eius autem motus verus in Latitudinem pro eodem temporis ſpatio eruitur $= 7'.38'',2$ Boream verſus: cum vero Parallaxis Lunae a Sole in Longitudinem tempore initii Eclipſeos fuerit $= 17'.8'',9$ Orientem verſus et in fine Eclipſeos $= 2'.26'',7$ ad Occidentem, concludimus exinde motum apparentem Lunae in Longitudinem pro duratione Eclipſeos obſervata $= 1^{\circ}.3'.43'',2$. Conſimili modo ex Parallaxi Lunae a Sole in Latitudinem pro initio et fine Eclipſeos ſupra exhibita et ex motu Lunae vero in Latitudi-

tudinem modo notato eruitur motus Lunae apparens in Latitudinem pro temporis ſpatio inter initium et finem Eclipſeos interpoſito = 6′. 39″, 3; qua quantitate imminuitur Latitudo apparens Meridionalis quam habet Luna initio Eclipſeos. Quod ad motum verum Solis in Ecliptica, ille pro duratione huius Eclipſeos obſervata reperitur = 5′. 58″, 7.

Hiſce praemiſſis, ſit S Locus centri Solis verus ad initium Eclipſis, linea EC exhibente chordam parvi arcus Eclipticae. Sit porro *s* Locus Solis verus tempore finis Eclipſeos, ita vt S*s* repraeſentet motum Solis verum pro duratione huius Deliquii Solaris obſervata. Pari modo fingatur Locus centri Lunae apparens initio Eclipſeos in N et in fine in L. Binae igitur illae lineae EN et CL perpendiculariter a punctis N et L in Eclipticam demiſſae referent Latitudinem Lunae apparentem ad duo illa praecipua Eclipſeos momenta; adeo vt ducta Eclipticae parallela ML, motus Lunae apparens in Longitudinem pro duratione Eclipſeos obſeruata determinet valorem huius rectae ML = EC; motus autem Lunae apparens in Latitudinem eidem temporis ſpatio reſpondens definiat valorem lineae MN. Facta PL = S*s*, SP erit = *s*L et MP aequabitur motui apparenti Lunae a Sole in Ecliptica ad durationem Eclipſeos obſeruatam. Ad deriuandum igitur ex obſeruatis Locum Lunae apparentem habebimus primum in Triangulo MLN ad M rectangulo crus ML = 1°. 3′. 43″, 2 itemque alterum crus MN = 6′. 39″, 3; vnde fluunt hypotenuſa NL = 1°. 4′. 4″ Tab. XII. Fig. 5.

 et

et angulus MLN = 5°.57′.44″¾. Datis porro in Triangulo PNL latere NL et angulo PLN modo inuentis, itemque latere PL = 5′.58″,7; colligimus NP = 58′.7″,4 et angulum NPL = 173°.25′.31″,4 conſequenter angulum NPM = 6°.34′.28″,6. Datur itaque in Triangulo NSP tria latera, nimirum NP = 58′.7″,4: NS = ſummae Semidiametrorum apparentium Lunae et Solis initio Eclipſeos = 32′.34″,2 et SP = eidem ſummae in fine Eclipſeos = 32′ 37″,6; quare per reſolutionem huius Trianguli obtinebimus ſequentes angulos, nempe angulum SPN = 26°.54′.37″,7 et angulum NSP = 126°.7′.42″ adeoque angulum ESN = 33°.32′.8″,9 et angulum MPS = L*s*C = 20°.20′.9″,1. Peruenimus ergo ad Triangulum ENS ad E rectangulum, in quo ex prius inuentis cognoſcimus hypotenuſam SN et angulum ESN; vnde deducimus Latitudinem Lunae apparentem ad momentum initii Eclipſeos, ſiue EN = 0°.17′.59″,6 Auſtr. et differentiam inter Locum Solis et Locum Lunae apparentem in Ecliptica ad idem temporis momentum per ES expreſſam = 27′.8″,9. Similiterque, in Triangulo C*s*L ad C rectangulo, hypotenuſa *s*L et angulo C*s*L datis, innoteſcet et Latitudo Lunae apparens pro fine Eclipſeos CL = 0°.11′.20″,3 Auſtr. et diſtantia apparens Lunae a Sole in Ecliptica pro eodem tempore C*s* = 30′.35″,6.

Admiſſa itaque Longitudine Solis vera ad initium Eclipſeos ſupra inuenta = 8ˢ.18°.3′,8″ adhibitaque ad Locum Lunae viſum Parallaxi Lunae a Sole tum in

Longi-

Longitudinem cum in Latitudinem etiam prius definita, prodibit Locus Lunae verus ex obſeruationibus noſtris collectus et cum eius Loco ex Tabulis *Halleianis* computato comparandus vt ſequitur.

| | Longitudo Lunae computata. | Latitudo Lunae computata. | Longitudo Lunae obſeruata. | Latitudo Lunae obſeruata. |
|---|---|---|---|---|
| 7. Ian. $21^h.6'.38''\frac{1}{3}$ mp. med. ſub Merid Berol. | $9^s.17^\circ.16.\ 5''$ | $0^\circ.38'.58''\frac{2}{3}$ Bor. | $9^s.17^\circ.18'.50''$ | $0^\circ.37'.43''$ Bor. |
| 7. Ian. $23^h.27'.26''\frac{3}{4}$ mp. med. ſub Merid. Berol. | 9. 18. 39. 24 | 0. 46. $36\frac{5}{3}$ Bor. | 9. 18. 42. $8\frac{2}{3}$ | 0. 45. $21\frac{1}{3}$ Bor. |

Perſpicuum eſt ex hac comparatione, Longitudinem Lunae veram ex obſeruatis deductam $2'.45''$ exſuperare Longitudinem Tabularem; Latitudinem Lunae obſeruatam contra $1'.15''$ deficere a Latitudine eius Tabulari. Quamuis igitur veram originem errorum Tabularum Lunarium ex vna alteraue Eclipſi etſi fauorabilibus ſub circumſtantiis obſeruata deducere lubricum periculoſumque ſit; probabile tamen fere eſt, Tabulas *Halleianas* Longitudinem Lunae mediam iuſto minorem exhibere: id quod non ſolum duae illae Eclipſes Solis, quarum calculum in hac diſſertatione inſtituimus, verum etiam aliae Eclipſes, inprimis Eclipſis Solis quae An. 1727. d. 15 Sept. a Viris Cel. *Caſſini* et *Kirch* obſeruata fuit, probare atque confirmare videntur.

Quod ad alterum errorem $1'.15''$ in Latitudine Lunae obuium attinet, obſeruandum eſt quod, ſi elementis quibus calculus noſter innititur error quidam notabilis inſit, iſte error neutiquam in duratione Eclipſeos quam accuratiſſime mihi obſeruata, ſed potius in Diametro Lunae apparente ſit quaerendus; et vero Diameter Lunae apparens in hac Eclipſi mihi parte 75. Diametri Solaris viſa eſt minor Diametro Solis. Quia igitur Diameter Solis in hac Eclipſi fuit $32'.43''$, deducitur ex noſtra obſeruatione Diameter Lunae apparens tempore Eclipſeos $= 32'.17''$, adeoque $18''$ fere minor ea quae ex Tabulis *Halleianis* colligitur. Dato autem errore in Diametro Lunae admiſſo, facili negotio eruitur error exinde in Latitudine Lunae naſcens, ea vtendo formula quam initio huius diſſertationis exhibui; cuius beneficio habebimus errorem Latitudinis, ſiue $dy = \frac{2r.\overline{coſ.e}^2.dr}{y+z}$. In praeſenti autem caſu erit $r = 1956''$; $dr = 9''$; $y = 18'.0''$; $z = 11'.20''$ et conſequenter $y+z = 1760''$. Quam ob rem per reſolutionem huius formulae habebitur $dy$, ſiue error Latitudinis quaeſitus $= 20''$, quibus Latitudo Lunae vera prius inuenta eſt augenda, vt prodeat Latitudo Lunae vera correcta. Hinc patet Latitudinem Lunae veram ex noſtris obſeruatis concluſam nunc $55''\frac{2}{3}$ tantum differre ab ea ex Tabulis *Halleianis* depromta. Ex hiſce meditationibus intelligitur, differentiam illam $18''$ quam in calculo antecedenti Eclipſeos Solaris An. 1748. inter Latitudinem Lunae veram Tabularem et obſeruatam inuenimus, nullo modo erroneae

Paral-

Parallaxi Lunae adſcribendam, neque igitur Parallaxin Lunae horizontalem ea de cauſa minuendam eſſe, vt Tabulae cum Coelo conſentiant. Clarum enim eſt, ſi differentia illa ex erronea Parallaxi Lunae fuerit nata, neceſſe fuiſſe, vt Latitudo Lunae vera ex obſeruationibus Eclipſeos Solaris Anni 1750. collecta, ſi aequationibus Parallaxeos *Halleianis* fidere fas eſt, Latitudinem Lunae veram ex Tabulis ad iſtud tempus computatam etiam exſuperaret: cum contra autem Latitudo Lunae ex noſtris obſeruationibus Eclipſeos An. 1750. deducta Latitudine Lunae Tabulari re vera minor ſit, et quidem quantitate ſatis notabili, exinde concludere poſſumus, Locum Nodi Lunae ex Tabulis *Halleianis* deductum non ſatis eſſe promotum; id quod et aliis Eclipſibus obſeruatis probabile redditur. Ceterum totum hunc errorem in Loco Nodi Lunae obuium in aequationibus Loco Nodi Lunaris medio applicandis, quarum praecipua in Syzigiis exigua euadit, latere vix credibile eſt; niſi nouae eaeque notabiles Nodi aequationes ex Theoria Lunari omnibus numeris abſoluta forte eruantur. Interim tamen dubium nullum eſſe videtur, quin praeter Nodum et aliis Tabularum Lunarium elementis error in Latitudine Lunae modo inuentus ſit adſcribendus: nam ſi totum errorem in Nodum coniicere liceret, Longitudinem Nodi 9½ min. prim. augeri oporteret, vt obſeruata Eclipſis expleretur, ſeruata Inclinatione Orbitae Lunaris ad Eclipticam ab *Halleio* ſtabilita. Manifeſtum etiam eſt, exiguum errorem, ſi quis forcaſſis in Inclinatione Orbitae Lunaris ad Eclipticam ad-

fuerit,

fuerit, fere nullum afferre poſſe errorem Latitudini ex: inde definiendae. Ea de cauſa aequum eſt, vt ſtatuamus Parallaxi Lunae horizontali Tabulari ineſſe errorem, quo bona pars differentiae nobis inter Latitudinem Lunae obſeruatam et Tabularem detectae producatur; ita quidem, vt ſecundum noſtras obſeruationes Parallaxis Lunae horizontalis ab *Halleio* admiſſa augenda ſit quantitate ex maiori obſeruationum diligentiſſime inſtitutarum numero praeciſe inpoſterum definienda. Interea tamen dum hoc perficiatur, ſi Parallaxin Lunae horizontalem augeamus parte ſui $100^{ma}$, prope accederemus ad quantitatem quam olim Parallaxi Lunae horizontali tribuit *Newtonus*. Immutata autem Parallaxi Lunae horizontali, totius calculi ſupra inſtituti ratio leuiter immutabitur. Recognito itaque calculo ſecundum hypotheſin, quod Parallaxis Lunae horizontalis Tabularis augenda ſit parte ſui $100^{ma}$, et quod Diameter Lunae apparens in Eclipſi Solari An. 1750. 18″ minor viſa ſit, quam ſecundum Tabulas; obtinebimus ad momentum initii Eclipſeos An. 1750. d. 7. Ian. $21^h.6'.38''\frac{1}{2}$ temp. med. aſtron. ſub Merid. Berol. Longitudinem Lunae veram $= 9^s.17°.18'.45''$, eiusque Latitudinem veram ad idem temporis momentum $= 0°.38'.30''$. Bor. ita vt remaneat adhuc differentia $\frac{1}{2}$ min. prim. inter Latitudinem Lunae Tabularem et eam, quae ex obſeruationibus ſupra relatis colligitur. Haec autem differentia vt euaneſcat, Locus Nodi Lunae promouendus eſſet 5 fere min. prim. quod quidem, ſi tota iſta correctio in Locum Nodi medium coniici deberet, nimium fere videtur: interim tamen Parallaxis Lunae horizontalis

vix

vix vltra augeri poteſt; etenim, ſi Parallaxis Lunae horizontalis vltra partem ſui 100$^{mam}$ augeretur, ex obſeruationibus Eclipſeos Solaris Anni 1748. maius adhuc incrementum caperet Longitudo Nodi: cum contra, ſi Parallaxis Lunae horizontalis augeatur parte ſui 100$^{ma}$, Longitudini Nodi Lunaris autem addantur 4. vel 5 minuta prima, Tabulae Lunares *Halleii* cum obſeruationibus Eclipſium Solis Annorum 1727, 1748 et 1750. ſatis conſentiant. Vt autem accurate ac prudenter in re adeo ſubtili atque ſpinoſa agamus, nihil certi in illo negotio ſtabilire audeo, ante quam calculus plurium Eclipſium diligenter obſeruatarum aliarumque obſeruationum ſcite inſtitutarum rem dirimat clariusque oſtendat: ſtabilire nimirum non audeo, quota ſui parte Parallaxis Lunae horizontalis *Halleiana* praeciſe ſit augenda, neque quantum Locus Nodi Lunae ex Tabulis *Halleianis* deſumtus accurate ſit promouendus. Haec autem explorata perſpectaque habere mihi videor: I$^{mo}$ quod Parallaxis Lunae horizontalis *Halleiana* iuſto minor fuit, tum in Eclipſi Solari An. 1727 obſeruata, cum in ea, quam ipſe An. 1750. d. 8 Ian. diligentiſſime obſeruaui: ex quo colligere eſt, Parallaxin Lunae horizontalem Tabularem etiam in Eclipſi Anno 1748. obſeruata iuſto minorem fuiſſe: nam ſi ea in hoc Deliquio Solari minuenda viſa fuerit, in Eclipſi Solari Anno 1750. obſeruata etiam erit imminuenda, cum differentia Parallaxium horizontalium Lunae in binis illis Deliquiis Solaribus ex Tabulis deducta non adeo a vera aberrare facile poſſe videatur, vt in altera

 Eclipſi

Eclipſi augeri, in altera imminui poſſit Parallaxis ipſa quantitate notabili; quo admiſſo, enormis exinde naſceretur differentia inter Nodi Lunaris Locum ſupputatum et obſeruatum. II^do^: quod Nodorum Lunarium Loca media ſecundum Tabulas *Halleianas* non ſatis ſunt promota, adeo vt vnum alterumue minutum primum Longitudini Nodi aſcendentis mediae addi poſſit; quo Longitudo media Nodi Lunaris ad eam accederet, quae in *Flamſteedii* Tabulis obuia eſt vno iam minuto primo excedens Longitudinem mediam Nodi aſcendentis Lunae in Tabulis *Halleianis* notatam. Reliquorum Tabularum errorum ſupra inuentorum fontes ex vera atque perfecta Theoria Lunari et aequationum Lunarium argumentis ex illa collectis ſunt diiudicandi.

OBSER-

# OBSERVATIONES ASTRONOMICAE SVB FINEM ANNI 1751. LIPSIAE HABITAE

a

GODOFR. HEINSIO.

*Occultatio Iouis partialis a Luna d. 29 Decembr. ſt. nou.*

Rarum hoc Phaenomenum, quod partem tantum Diſci Iouis a Luna tranſeunte tectam oſtendebat, coeli facies per totum diem nubila oculis eripuiſſet, niſi poſt horam 9. veſpertinam feliciter nubes ita attenuari incepiſſent, vt per vices adſpectum Lunae et Iouis mediante Teleſcopio concederent. Sic quidem ope Tubi Gregoriani ſub apparatu, quo iſte obiecta ſecundum Diametrum 52 vicibus auget, per temporis interualla, ſubinde valde exigua, varias obſeruationes inſtituere licuit; obſeruationem tamen completam, qua ſitus Iouis reſpectu Lunae diuerſis temporis momentis ope Machinae parallacticae definiri potuiſſet, et illa coeli facies denegauit. Vtrumque Sidus, quotiescunque eius adſpectus concedebatur, nube tenui inuolutum comparuit, nec, niſi vna vice et per inſtans, faſcia Iouis et vnicus Satelles conſpici potuerunt. Licet autem ſic ſolo ſenſuum iudicio obſeruatio peracta fuerit, iſta tamen ob ſingularem circumſtantiam ita comparata cenſeri debet, vt in celebri, quod iſto tempore agebatur,

batur, negotio Cl.[mi] *de la Caille* pro definienda Lunae Parallaxi, vſum promittere poſſit; quam ob rem in circumſtantiarum enumeratione paulum prolixus ero. Tab. XII. Fig. B. Figura adiecta, Lunae phaſin tribus ante plenilunium diebus pro linea cuſpidum AB exhibens et ſitu erecto delineata, lucem affundet, quam ipſa quidem apparentia, exactiorem autem ſchema ex Ephemeridibus conſtructum ſuppeditauit. Tempus quoque horologii noto, vt de momentorum certitudine facilius iudicium fieri poſſit, quod ex variis Capellae altitudinibus correctum et in tempus verum Solare transmutatum altera columna exponit.

| Obſeru. ordo | Tempus horologii | Tempus verum | |
|---|---|---|---|
| 1) | $9^h.46'.0''$. | $9^h.21'.38''$. | Interuallum inter Iouis limbum borealem et terminum phaſeos Lunae proximum circiter erat = 2¼. Diam. ♃vis. vid. Fig. ad 1. |
| 2) | - 50. 0. | - 25. 38. | Idem interuallum erat = ¼ Diam. ♃vis. v. Fig. ad 2. |
| 3) | - 51. 40. | - 27. 18. | Idem interuallum vix = ¼ Diam. ♃vis. |
| 4) | - 52. 50. | - 28. 28. | Limbus Iouis borealis terminum phaſeos auſtralem tangere videbatur. v. Fig. ad 4. Nubes deinde interueniebant. |

5)

5) 9h.56'.20".9h.31'.58". Tertia fere pars Diametri Iouis a Luna tecta cernebatur; Iupiter autem proxime ad cuſpidem phaſeos A conſtitutus erat, tranſiturus nunc limbum Lunae circulariter terminatum. Ab eo tempore Iupiter limbum Lunae auſtralem ita traiiciebat, vt ad ſenſum ſemper tertia Diametri Iouialis pars a limbo Lunae tecta eſſet (vid. Fig. ad. 5.), et quidem tertia pars Diametri minoris ♃vis; ſiquidem Iupiter notabiliter oualis apparebat, exiſtente Diametro maiori ad limbum Lunae proximum fere parallela.

6) - 57. 30. - 33. 5. Idem adhuc erat adſpectus, quem nubes deinceps eripiebant; aſt

7) 10. 0. 0. - 35. 38. paululum minus quam ⅓, plus autem quam ¼ Diametri ♃vis a limbo Lunae adhuc tegi credebam.

8) - 5. 20. - 38. 58. Iupiter limbo ſuo boreali limbum Lunae auſtralem, abſoluta

| | |
|---|---|
| | ſoluta occultatione, tangere videbatur v. Fig. ad 8. |
| 9) $10^h.3'.50''.9^h.39'.28''$. | Tactus iſte certe peractus erat. Parum aberrari puto, ſi ad |
| 10) - 3. 30. - 39. 8. | Momentum tactus veri ponatur. |
| 11) - 9. 30 - 45. 8. | Diſtantia limbi Iouis ad Lunam proximi ab auſtrali Lunae margine erat = vni Diametro ♃vis. vid. Fig. ad 11. |
| 12) - 13. 0. - 48. 38. | Iſta diſtantia proxime erat = $2\frac{1}{3}$ Diam. ♃vis. Circa hoc tempus, aſt per inſtans quaſi, Satellitem Iouis videre licuit et faſciam, quae protracta limbum Lunae inferiorem tangere videbatur. v. Fig. ad 12. |

Conſiderando circumſtantias obſeruationum facile adducor credere, in aeſtimio occultationis maximae, ſi quantitas eius aequalis tertiae parti Diametri minoris Iouis ſtatuatur, vix errorem 3. vel 4. ſecundorum circuli maximi locum habere poſſe, quae circumſtantia vſum obſeruationis commendat. Praeterea tranſitus Iouis ad Lunam contigit circa culminationem Lunae, quae ſecundum Ephemerides circiter hor. 9. 28'. fieri debuit; ipſaque Luna prope nodum deſcendenten verſabatur.

Si

Si de momento, quo occultatio maxima, vel diſtantia centrorum minima, accidit, quaeras; fateor quidem, omnem rigorem in eius definitione obtineri non poſſe, cum, ex conditione tranſitus, lentus admodum fuerit Iouis ad Lunam acceſſus et ab ea receſſus, vt de momentis contactus Iouis et Lunae, aliarumque Iouis reſpectu Lunae poſitionum ſenſuum iudicio aeſtimatarum, certo ſtatuere non licuerit; attamen periculum huius rei facere non poenitebit. Scilicet

| | Temp. vero |
|---|---|
| Momentum tactus poſt occultationem erat per num. 10 - - - | $9^h. 39'. 8''$ |
| Si igitur momentum num. 4 - - | 9. 28. 28 |
| accipiatur pro momento tactus ante occultationem, cum terminus phaſeos Lunae in hoc loco prope confundereretur cum limbo Lunae, | |
| erit momentum occultationis maximae - | 9. 33. 48 |
| Si obſeruationum num. 5. et 7. eadem ſtatuatur conditio ante et poſt occultationem, ob momentum num. 7 — — — | $9^h. 35'. 38''$ |
| — — — — num. 5. — — — | 9. 31. 58. |
| erit momentum Occultat. maximae — | 9. 33. 48. |
| Tactus poſt occultationem contigit num. 10. - | 9. 39. 8. |
| et per num. 11. diſtabat limbus ♃uis a limbo Lunae proximo interuallo Diametri ♃uis. - | 9. 45. 8. |
| Si igitur intermedium ex his momentum | 9. 42. 8. |

ponatur

ponatur reſpondere interuallo $\frac{1}{2}$ Diametri ♃uis pro diſtantia limbi ♃uis à limbo Lunae poſt occultationem,

cum per num. 2. eidem interuallo ante occultationem reſponderet - - - 9. 25. 38.

erit momentum Occultat. maximae - - 9. 33. 53.

His ita conſtitutis, non multum aberrabitur, ſi *Momentum occultationis maximae* ponatur $9^b.33'.50''$. temp. veri.

## Eclipſes Satellitum Iouis.

*Die* 27 *Decembr*. ſt. nou. Emerſiones Satellitum, primi et ſecundi, ope Tubi Gregoriani ſub apparatu ſupra indicato, obſeruare licuit. Coelum quidem obſeruationi fauebat; aſt cum correctio temporis, ad duo licet horologia oſcillatoria comparati, ex iis determinationibus peti debuerit, quae in eundem finem die 29. Decembr. adhibitae fuerunt; error aliquot ſecundorum, paucorum licet, in notatis momentis locum habere poteſt.

| Temp. vero | |
|---|---|
| $4^b.45'.5''$. | Satelles ſecundus emergere incipiebat. |
| 46. 40. | Satellitem iſtum totum emerſum credebam. |
| 57. 18. | Satelles primus emergere incipiebat. |
| 59. 0. | Satelles iſte totus extra vmbram cenſebatur. |

OBSER-

# OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PEKINI HABITAE a *RR. PP. GALLIS S. I.*

## Mercurius in Sole viſus.

Tubo 15 pedum. 1753. d. 6 Maii
temp. corr.
mane h. 10. 6'. 10''. aut 12''. Mercurium ad Solis limbum videre mihi videor
h. 10. 9'. 3''. totus Mercurius in Sole
p. m. h. 5. 52'. 55''. Mercurius ad Solis limbum
Deinde nubeculae et puluis et magnus ventus. Nihil certi video.

Non ſine labore et damno oculorum diu expectaui ingreſſum Mercurii in diſcum Solis. Error magnus deprehenſus eſt in Ephemeridibus Pariſienſibus et Bononienſibus et in Tabulis Caſſinianis. Quia volui nimium multa obſeruare, parum certe et exacti obſeruaui.

## Eclipſis Lunae 1754. d. 1. Octobr.

| | temp. corr. |
|---|---|
| Recuperatio luminis — | $6^b$. 47'. 38'' |
| Extra vmbram totus Grimaldus | — 51. 20 |
| totus Ariſtarchus | — 59. 30 |
| totus Heraclides | $7^b$ 7. 40 |
| totus Tycho | — 12. 30 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| totus Copernicus | $7^h$ | 15. | 15 |
| totus Plato | – | 18. | 20 |
| totus Manilius | – | 27. | 35 |
| totus Menelaus | – | 30. | 35 |
| totus Plinius | – | 35. | 31 dub. |
| totum Promont. acut. | – | 40. | 10 |
| totum mare criſium | – | 50. | 2 |
| dubitatur de fine Eclipſis | – | 52′. | 2″ |
| Certe nulla Eclipſis | – | 53. | 0. |

Poſt finem Eclipſis merid. alt. Lunae ſuperioris limbi 22°. 34′.

Diameter Lunae in Microm. 29′30″ et aliquot tert.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Eclipſis 6 digitor. | | $7^h$. | 21′. | 7″. |
| 3 | — | — | 38. | 39. |
| 2 | — | — | 42. | 47. |
| 1 | — | — | 47. | 50. |

## Obſeruationes Lyrae.

Anno 1754.

| Menſis, | Dies, | in partibus micrometri | in gradibus | aberratio fixarum | altitudines correctae |
|---|---|---|---|---|---|
| Nou. | 5. | 88°.40′–30. | 88°.39′.28″ | +13″.36‴. | 88°.39′.41″.36‴. |
| | 6. | 88. 40–28. | 88. 39.30. | +13. 20. | 88. 39. 43. 20. |
| | 9. | 88. 40–29. | 88. 39.29. | +12. 50. | 88. 39. 41. 50. |
| | | | | | |
| 1. | 1. | 20+52. | 1. 20.56. | –14. 13. | 1. 20. 41. 27. |
| 4. | 1. | 20+53. | 1. 20.57. | –13. 46. | 1. 20. 43. 14. |
| 8. | 1. | 20+57. | 1. 21. 1. | –13. 5. | 1. 20. 47. 55. |
| 10. | 1. | 20+54. | 1. 20.58. | –12. 35. | 1. 20. 45. 25. |

Altitu-

| | | |
|---|---|---|
| Altitudines mediae | 88°.39′.42″.15‴. | 1.20.44 30. |
| refractio | 1. 27. | 1.27. |
| altitudines correctae a refract. | 88. 39. 40. 48. | 1.20.45.57. |
| Summa | 0. 0. 26. 45. | |
| ½ exceſſ. altitud. quadr. | 13. 22. | 13.22. |
| exceſſus correctio | 88. 39. 27. 26. | 1.20.32.35. |
| declin. Lyrae Nou. an. 1754. | 38. 34. 14. 16. | 38.34.32.35. |
| altitud. aequatoris in domo noſtra | 50. 5. 13. 10. | 39.54.46.51. |
| Nouembris 15. altitudo merid. limbi ſuperioris ☉ | | 31°. 9′.55″. |
| diameter ☉ in partibus micrometri | | 1783. |

## Obſervationes Capellae.

Ao. 1755.

| Februarii | in partibus. micrometri | in gradibus. | aberratio. | altitudines correctae |
|---|---|---|---|---|
| 12. | 95°.50′—103. | 95°.48′. | 8″.+7″.58‴. | 95°.48′.15″.58‴. |
| 13. | 95. 50.—104. | 95. 48. | 7. +8. 0. | 95. 48. 15. 0. |
| 15. | 95. 50.—101. | 95. 48. | 10. +8. 2. | 95. 48. 18. 2. |
| 7. | 84. 10. +128. | 84. 12. 18. | —7. 52. | 84. 12. 10. 8. |
| 14. | 84. 10. +133. | 84. 12. 23. | —8. 1. | 84. 12. 14. 59. |
| 16. | 84. 10. +142. | 84. 12. 33. | —8. 3. | 84. 12. 24. 59. |

| | | |
|---|---|---|
| Altitudines mediae | 95.48.12.12. | 84 12.16.40. |
| refractio | 6.34. | 6.34. |
| altitud. correctae a refract. | 95.48.18.46. | 84.12.10. 6. |
| Summa | | 0. 0.28.52. |
| ½ exceſſus quadr. | 14.26. | 14.26. |
| exceſſus correctio | 95 48. 4.20. | 84.11.55.40. |
| declin. Capellae Febr. an. 1755. | 45.43.21.11. | 45.43.21.11. |
| altit. aequ. in reſid. noſtra | 50. 4.43. 9. | 39.55.16.51. altit. Poli. |

 Cum

Cum altitudo Poli, deducta ex obſeruationibus Capellae, maior ſit 30′′. 1′′′. altitudine Poli, deducta ex obſeruationibus Lyrae, neceſſe eſt, irrepſiſſe aliquem errorem, quem, quando erit otium, examinabo.

1755. diebus XXI. XXII. XXIV. XXVI. Decembris

| | | |
|---|---|---|
| Stellae polaris altit. ſuperior | 41°.55′ 52′′. | 39°.56′.22′′.30′′′ |
| inferior | 37. 56. 53. | |
| differentia | 3. 58. 59. | |
| dimidium | 1. 59. 30. | |
| refractio Newton. | 1. 4. | |
| altit. Poli | 39°.55′.18′′.30′′′. | |
| refractio ex Ephem. Pariſ. | — 1′.10′′. | |
| altit. Poli | 39°.55′.12′′.30′′′. | |
| medium | 39. 55. 15. 30′′′. | |

## Antiqua polaris ſinica.

1756. 7. 9. 10. 11. 13.

| | | |
|---|---|---|
| altitudo ſuperior | 45°.12′.10′′. | 39°.56′.24′′. |
| inferior | 34. 40. 38. | |
| differentia | 10. 31. 32. | |
| dimidium | 5. 15. 46. | |
| refractio Newton. | 1. 4. | |
| altitudo Poli | 39. 55. 20. | |
| refractio ex Ephemer. Pariſ. | — 1. 10. | |
| altitudo Poli | 39. 55. 14. | |
| medium | 39. 55. 17. | |

Con-

Conſtat, ſtellam, quam voco antiquam polarem ſinicam, fuiſſe apud Sinas polarem ab aliquot annis ante Chriſtum, vsque ad tempus, quo praecedenti ſaeculo P. P. miſſionarii Soc. Ieſu fuere admiſſi in tribunal aſtronomiae

Initio anni 1744. Ex catalogo P. Ignatii Koegler Soc. Ieſu
ſtellae aſc. recta 191°. 52'. 7''.
lat. b. – – 57. 2. 51.

## Obſeruationes variae Pekini habitae An. 1756. temp. corr.

22. Ianuar B in virgine a Luna fuit occultata $1^h.32'14''$. ad auſtrum Galil. Emers. $2^h.50'$. in recta cum Menelao et Galilaeo.

10. Febr. Luna occultauit Aldebaran $0^h.36'.12$. poſt med. noctem, in recta cum centro criſium et ſpatio inter Plinium et Poſſidonium.

28. Febr. Luna occultauit η in virg. $9^h.52'.10'''.\frac{2}{3}$ in recta cum Taruntio (forte prom. ſomnii) et Menel. nocte inter 8 et 9 Nouembr. Luna occultauit Aldebaran. Immers. $11^h.10'$. ad auſtrum limbi, qui eſt e regione Grimaldi. Emers. $12^h.28'.9''$. diſtantia a limbo, qui eſt e regione criſium ferme 10'.

## Tranſitus ☿ per Solem.

| | |
|---|---|
| 7. Noubr. | horr. corr. |
| Dubium, vtrum ☿ ſit in limbo ⊙ | $9^h.29'.49''$. mane tempus ſerenum |
| Centrum Mercurii in limbo ⊙ | – 30. 51. |
| totus ☿ in ⊙ – – – | – 31. 54. exact. obſeru. |

poſt merid.

| | | |
|---|---|---|
| ☿ ad limbum ☉ | $2^b\ 54'.25''$ | tempus ſerenum exact. obſeru. |
| tot. ☿ exiuit e diſco ☉ | — 56. 28 | |

Ex variis obſeruationibus ante et poſt merid. factis tub. 7. ped. cum microm. exiſtimaui chordam ſemitae ☿ fuiſſe $32'.11''$ motum horarinm in orbita propria $5'.57''$ in medio Eclipſis centrorum ☉ et ☿ diſtantia $1'.2''$. Per tempus nondum licuit in ordinem diſponere exacte omnes obſeruationes factas in tranſitu Mercurii.

## Apparentes altitudines meridianae Stellarum aliquot.

| 1756. | | |
|---|---|---|
| 1ª Caudae Vrſae maioris | $72°.38'.9''.25'''$. 8 Iun. 1756 | altitudo eſt media inter aliquot alias. |
| 2ª Caudae ζ | $73°.40'$ + $168\frac{1}{2}$ part. micrometri 14 Iun. | mediae altitudines inter aliquot alias. |
| 3ª η - - | 79. 20. + 168 part. 20 Iun. | |
| Capellae - | 84. 10 + 125 part. 22 Mart. | |
| | 95. 50 — 124 part $\frac{1}{2}$ inter 7 et 20 Mart. | mediae altitudines inter alias. |
| | 84. 10. + 136 part. 29. 24 Auguſt. | |
| Aurigae humerus 22 Mart. | $85°.1'.57''.23'''$ | altitudo haec eſt media, nonnullae aliae fuerunt obſeruatae, parua fuit differentia. |
| Lyra - - | $88°.38'.49''.26'''$. 8 April | ex aliis obſeruationibus non paucis ſelectae ſunt hae 2 tanquam mediae. |
| | 91. 21. 10. 30. 4 April | |

ſub finem $7^{br}$. et initio $8^{br}$. plures aliae obſeruationes factae ſunt, ſed non referuntur: fuit aliqua mutatio in inſtrumento.

Algol

Algol - - 89°.55′.34″. 26. 27. 30. Decembr. 1755
90. 4. 25.

90° — 240 part. 19 Aug. }
90 — 240 part. $\frac{1}{2}$ 22 Aug } 1756.

Pes Andromedae ♉ 90°.10′ + 186 part.
88. 50. — 185 vel 184$\frac{3}{4}$ 30 Iul. 4. 8. 9. 10. 13 Aug.
88°.46′.28″.30‴. 30 Decbr. 1755

Perſei lateris lucida. 81°. — 139 part. 26 Aug.
81 — 139 $\frac{1}{2}$ 25 Aug.
81 — 137. 24 Aug.
media 81° — 138 p. $\frac{1}{2}$

Cygni Cauda 85° 29′. 54″. 30‴. 22 Aug.
94. 30. 5. 20. dub.

Caput Draconis ♉ 78°. 24′. 9″ 34‴. 30 Mart.
78. 20 + 228 part.
78. 20 + 194
78. 20 + 194 part. $\frac{1}{2}$. 29. 30. Aug.

Lucida Humeri B 54°. 50′ — 190 part. $\frac{1}{2}$
In Vrſa minori plures alias 16 Decembr.
17 Decembr.
Arcturus - 70°. 30′. + 168. part. 20 Iul. 20 Decembr. 1755
70. 33 + 20 Iun. 70°. 33′ 1″ aut 2″

Aldebaran 66° + 280 part. $\frac{1}{3}$ 28 Febr. nonnullae aliae obſeruationes huic fuere conformes anno 1755 menſis Decembr. 26 Spica. Sirius

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sirius | 33° 40′. + 110 part. 26. Mart. 7. April | | |
| ex alia obſeruatione | 40°. 12′. 57″ | | |
| altitudo | 33°. 40′ + 114 part. | | |
| Rigel | 41°. 35′. 35″. 54‴. 4 Mart. | 1755. 30 Decembr. | |
| α in Orione | 51°. 25′. 40″. 4 Mart. dub. | 41°. 35′. 42″ | |

In obſeruatione ſtellarum adhibitum eſt inſtrumentum ped. 3½ micrometro inſtructum, in micrometro vna reuolutio continet 100 partes = 1′. 49″. 25‴ pars quaelibet = 1″. 5‴. 39$^{IV}$.

## Satellites Iouis

tub. 13 ped. horr. Correct. per altit. ☉ correſp.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| mane | 10 Ianuar. | 4$^b$. 16′. 43″ Imm. 1′ | in his 2 obſeru. dubium 7″ aut 8″. | |
| | | 6. 5. 9 Imm. 3′ | | |
| mane | 17 Ianuar. | 6$^b$. 7′. 54″ Imm. 1′ | melius forte 6$^b$. 7′. 40″. dub. | |
| mane | 10 Febr. | 2$^b$. 44′. 39″½ Imm. 2′ | | |
| mane | 22 Febr. | 5$^b$. 47′. 31″ Imm. 3′ | | |
| mane | 25 Febr. | 4$^b$. 28′. 53″ Imm. 1′ | | |
| poſt merid. | 26 Febr. | 10$^b$. 57′. 59″⅓ Imm. 1′ | | |
| mane | 4 Mart. | 2$^b$. 17′. 54″ Imm. 2′ | | |
| mane | 11 Mart. | 4$^b$. 52′. 49″ Imm. 2′ | | |
| poſt merid. | 21 Mart. | 9$^b$. 46′. 46″ Imm. 3′ | 9$^b$. 47′. 24″ Imm. tubo 20 ped. | |
| p. merid. | 15 April. | 8$^b$ 26′. 47″ Emers 2 | | |
| p. merid. | 22 April. | 11$^b$. 2′. 28″ Em. 2′ | | |
| p. merid. | 17 Maii | 7$^b$. 58′. 21″ Em. 2′ | | |
| p. merid. | 22 Iun. | 8$^b$. 51′. 8″ Emers. 1′ | dub. | |
| p. merid. | 25 Iun. | 10$^b$. 5′. 55″ Emers 2′ | | |
| p. merid. | 8 Iun. | 7$^b$. 54′. 3″ notaui Emers. 3′ tubo 20 ped. ſed propter diei claritatem dubiam habeo obſeruationem illam. | | |

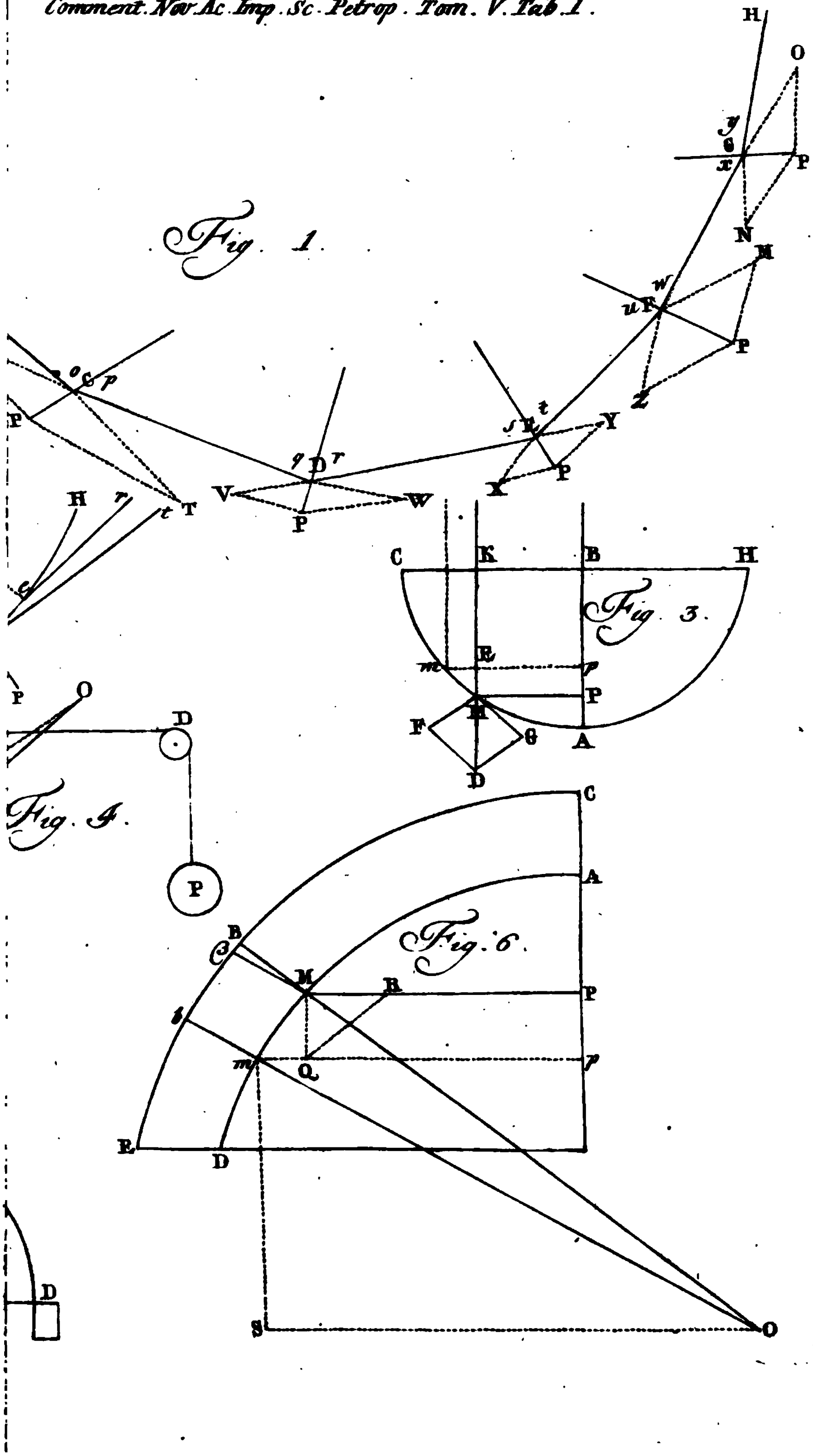
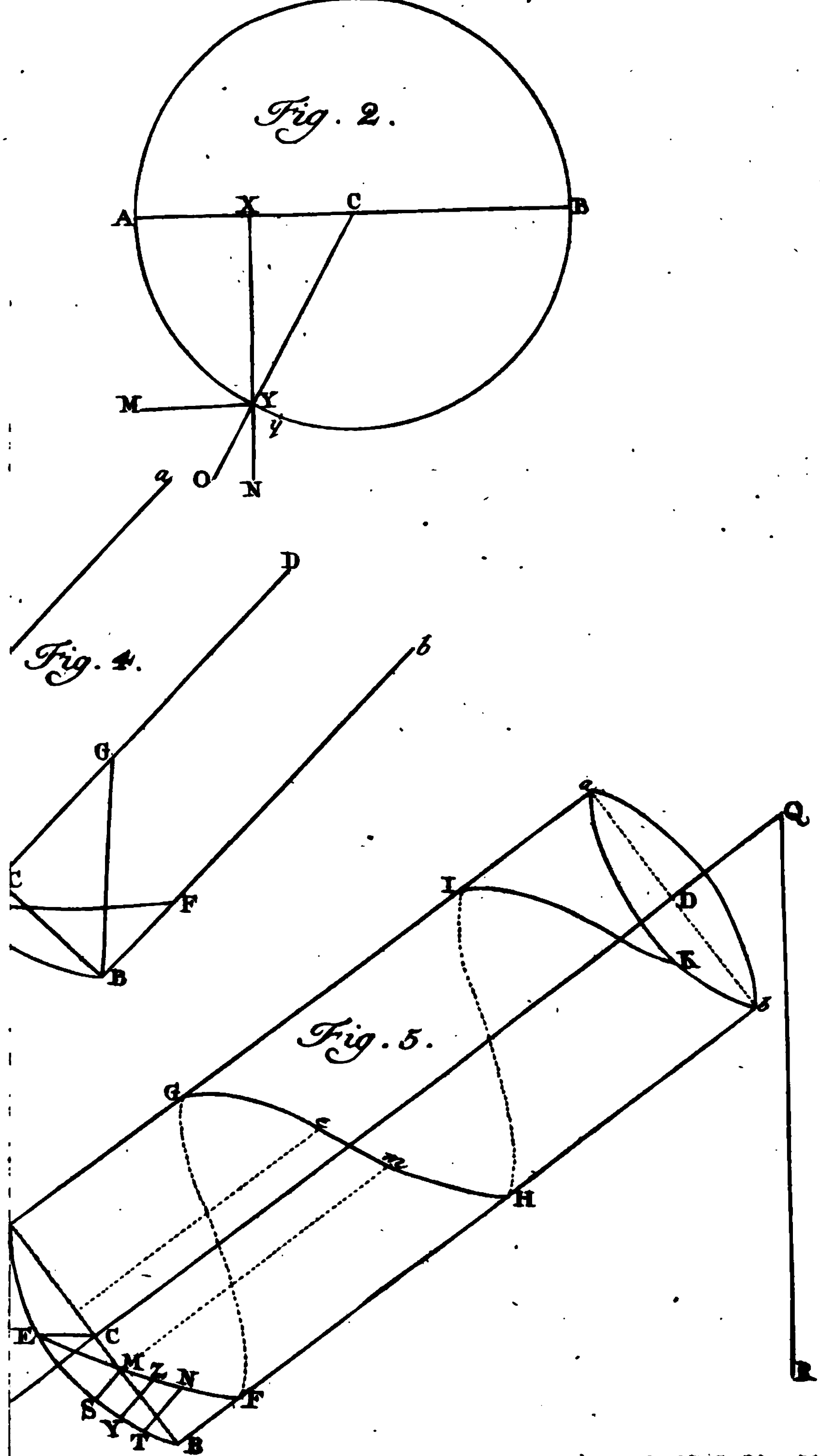


Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.


Fig. 2.
A
X
C
B
M
Y
y
O
N
Fig. 4.
a
D
b
G
C
F
B
Fig. 5.
a
Q
I
D
K
b
G
c
m
H
E
C
M
Z
N
S
Y
T
B
F
R

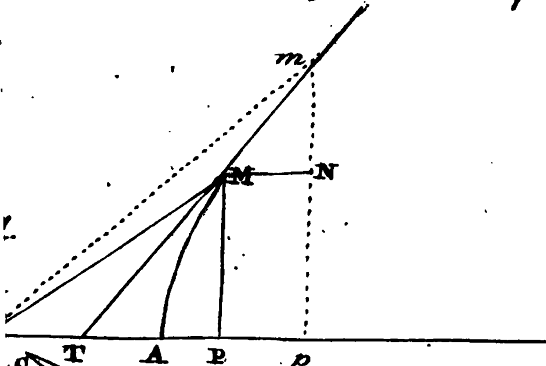
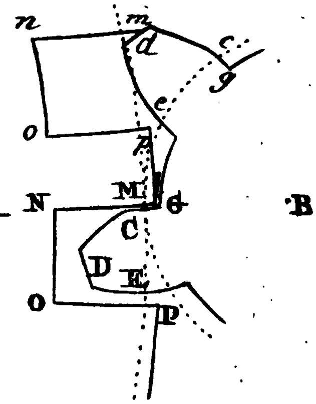



Fig. 6.



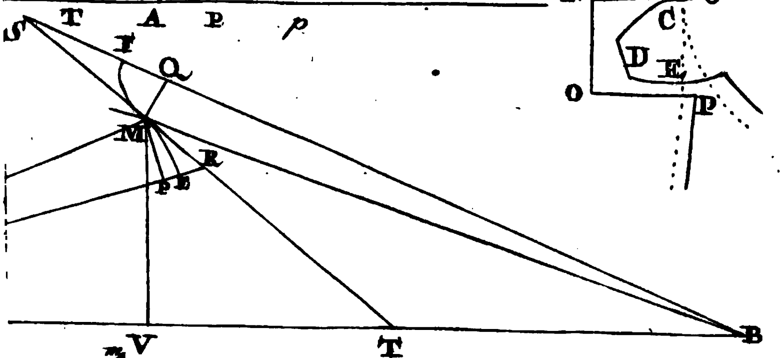
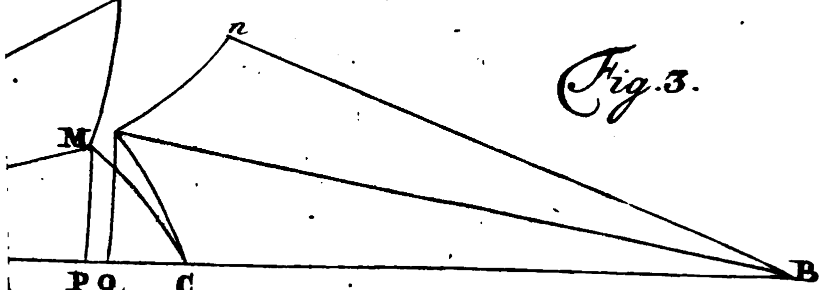




Fig. 3.



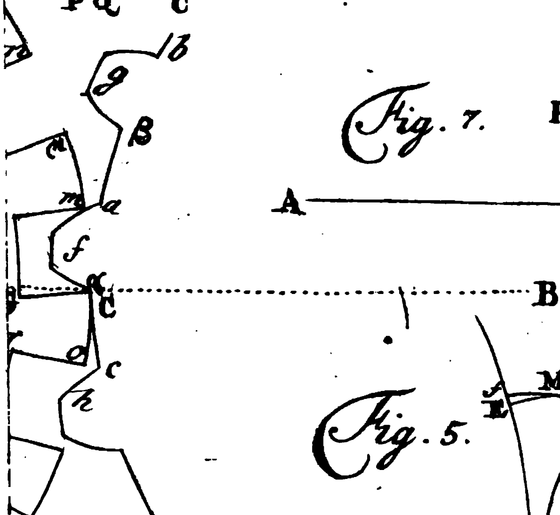




Fig. 7.

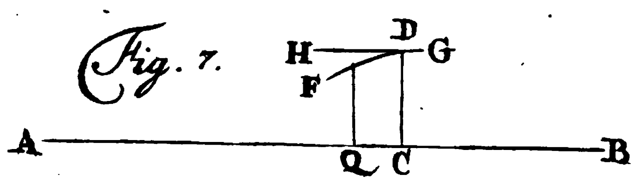



Fig. 5.

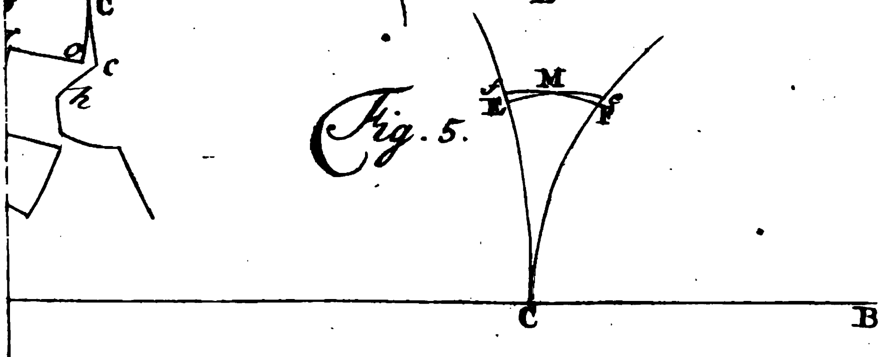


Fig. 1.





Fig. 1.



ellipticis foliis lanceolato-linearibus integerrimis.

*bellina*



*Comment. Nov. Ac. Imp. Sc. Petrop. Tom. V. Tab. VII.*



Грид: Н: Плотцовъ

uda



minor virgatus

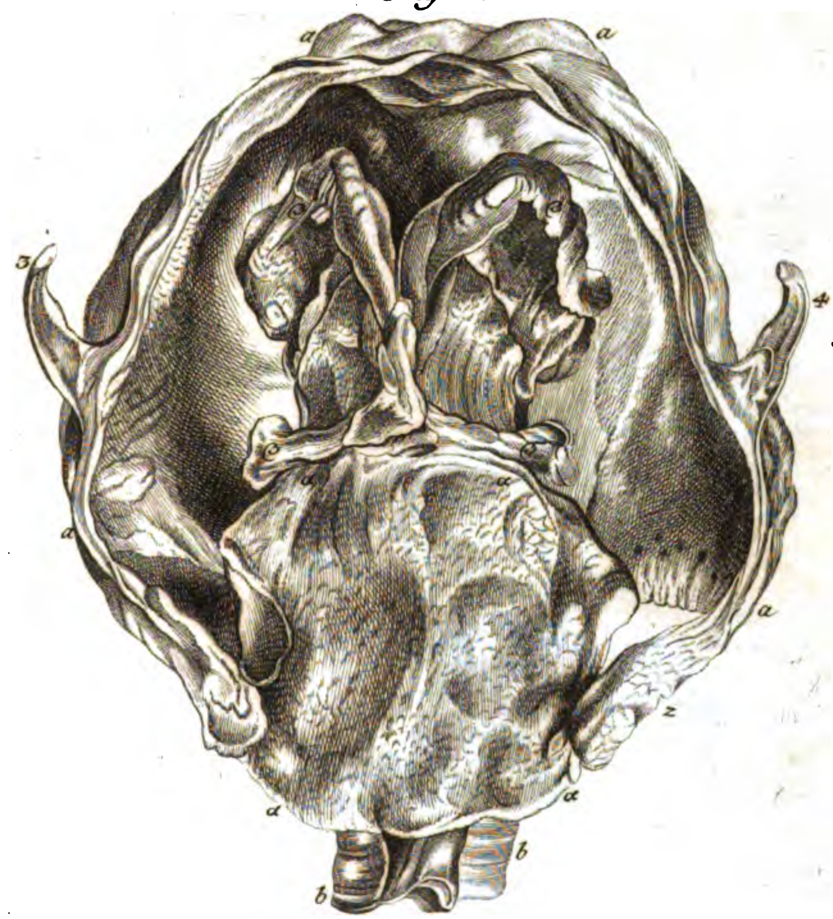


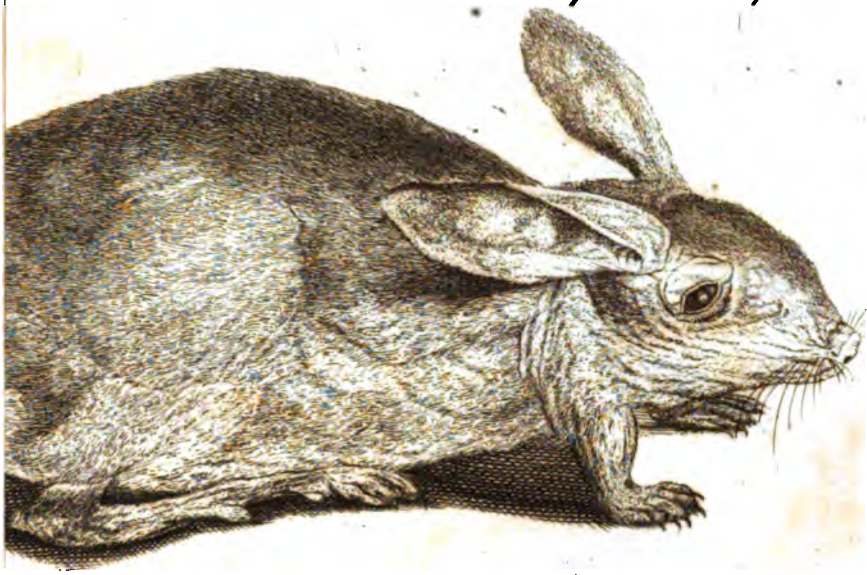
tris gutturosa



gutturosae
deciduis.

Fig. 2.







tus



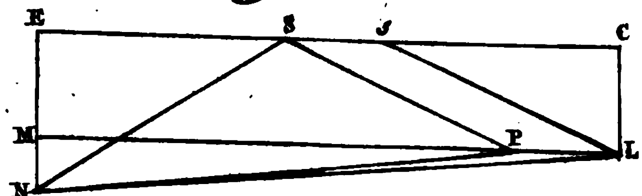

Fig. 2.




Fig. 3.




Fig. 5



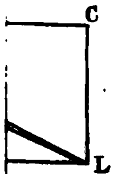




Fig. B.

